

Born-Infeld action and Supersymmetry

(in spanish)

A thesis submitted to
Universidad de Cuyo
for the
Ph.D. Degree in Physics

by
Guillermo A. Silva
Departamento de Física
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de La Plata

2000

Abstract

In the thesis we analyze different problems related to the supersymmetric extension of the Dirac-Born-Infeld action. In chapter 2 we introduce the DBI action and show how it appears in string theory, we discuss also it's connection with Dp-branes. Chapter 3 is a self contained introduction to supersymmetry, with emphasis on BPS states. In chapter 4 we construct the $N = 2$ supersymmetric extension of the Born-Infeld-Higgs in three space-time dimensions and discuss it's BPS states and Bogomol'nyi bounds. In chapter 5 we construct the $N = 1$ supersymmetric extension of the non-abelian Born-Infeld theory in four space-time dimensions. Chapter 6 deals with the analisis of BPS and non-BPS solutions of the Dirac-Born-Infeld action and their interpretation in superstring theory. Chapter 7 is devoted to the conclusions. Three appendix complete the work.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a Fidel, por el infatigable estímulo que me brindó en estos tres años, por su incisivo carácter a la hora de discutir y por todo lo que me enseñó. A los chicos de La Plata y Buenos Aires: charles, sonia, martín, daniel, nico, leo, gastón y mauricio, todas las horas que charlamos tomando café y aprendiendo.

Finalmente nada en esta tesis hubiera sido posible sin el apoyo de muchos amigos, (*ales, jaila, gordi y lio*) $\times 2$, toda la familia, y en especial de vos, SIL.

Contents

1	Introducción	1
2	Ideas básicas	9
2.1	La Teoría de Born-Infeld	9
2.2	Acción de Born-Infeld en teoría de cuerdas	10
2.3	La teoría de Dirac-Born-Infeld y Dp-branas	14
2.4	El electrón à la Strominger-Callan-Maldacena	16
3	La supersimetría y sus representaciones	18
3.1	Introducción	18
3.2	Representaciones de la supersimetría	21
3.2.1	Ausencia de cargas centrales	22
3.2.2	Cargas centrales no nulas	27
3.3	Estados saturados o Estados BPS	29
3.4	Formalismo de supercampos $N = 1$	30
3.4.1	Superespacio	31
3.4.2	Supercampos	32
3.4.3	Representaciones irreducibles	34
4	Teoría de Born-Infeld-Higgs Abeliana y cotas BPS	40
4.1	Introducción	40
4.2	El modelo supersimétrico de Born-Infeld	42
4.3	El modelo supersimétrico de Higgs	48
4.4	El modelo supersimétrico $N = 2$ de Born-Infeld-Higgs en $d = 3$	51

4.5	Cota à la Bogomol'nyi	55
4.6	Ecuaciones BPS en el modelo de Born-Infeld-Higgs	56
4.7	Algebra supersimétrica $N = 2$ y cota de Bogomol'nyi	58
4.8	Unicidad de las ecuaciones de Bogomol'nyi	63
4.9	Resumen y Discusión	70
5	Teoría de Born-Infeld no Abelianas	72
5.1	Introducción	72
5.2	Construcción de la acción	74
5.3	Aspectos BPS	82
5.4	Discusión	84
6	Diones no-BPS y branas en la teoría de Dirac-Born-Infeld	85
6.1	Introducción	85
6.2	Soluciones a la acción de Dirac-Born-Infeld	87
6.2.1	Acción de Dirac-Born-Infeld	87
6.2.2	Dión en la teoría de Born-Infeld	89
6.2.3	Dión en la teoría de Dirac-Born-Infeld	91
6.3	Dinámica y condiciones de borde efectivas	99
6.4	Resumen y discusión	101
7	Conclusiones	103
A	Convenciones	107
B	Componentes de los supercampos	123
C	Reducción dimensional $d = 4 \rightarrow d = 3$	130

Chapter 1

Introducción

La motivación original de Max Born y Leopold Infeld al formular la teoría hoy conocida como de Born-Infeld [1]-[2] fue la de atribuir, a nivel clásico, un origen electromagnético a la masa de las partículas conocidas hasta ese momento, mediante una modificación de las ecuaciones de Maxwell. La idea básica era considerar a las partículas de materia como singularidades del campo, de manera que la noción de masa pudiera expresarse en términos de la energía de la configuración de campo (masa electromagnética). En lenguaje moderno, Born e Infeld querían ver aparecer a las partículas como solitones del modelo. En realidad no lo lograron: la solución que presentaron, hoy llamada BIón, es una solución con fuentes (a diferencia del caso solitónico) de las ecuaciones de movimiento.

La observación hecha por Born e Infeld, que condujo a postular una acción, se basó en una analogía con la relatividad especial, donde el imponer una cota máxima para la velocidad, fuerza a reemplazar la acción de Newton para la partícula libre, por la acción relativista. Aplicando una condición análoga en relación con una nueva constante básica β , reemplazaron la acción de Maxwell por una que hoy lleva sus nombres. La constante dimensional β está relacionada con el valor máximo (finito) que puede tomar el campo electromagnético. Esto conduce, al calcular la energía de la solución, a un resultado finito. En la propuesta de Born e Infeld para interpretar al electrón, la masa tenía origen electromagnético, y se resolvía el problema de autoenergía infinita.

El descubrimiento del neutrón mostró que la masa no estaba indisolublemente ligada a la carga [3]. Las dificultades encontradas en la cuantificación de la teoría y el éxito

de la electrodinámica cuántica desarrollada por Dyson, Feynman, Schwinger y Tomonaga, provocaron el olvido de la teoría de Born-Infeld por aproximadamente 50 años. Recién en los años '80 se la vió resurgir en el contexto de la teoría de cuerdas.

La supersimetría nació del estudio realizado por Y. Gol'fand y E. Likhtman de las álgebras de Lie gradadas [4]. Este tipo de álgebras de Lie hace aparecer, además de los conmutadores usuales, anticonmutadores entre algunos de los generadores del álgebra. Independientemente, J. Wess y B. Zumino [5] concibieron la idea de la supersimetría al generalizar a $d = 4$ la supersimetría del modelo de cuerdas bidimensional de Ramond-Neveu-Schwarz.

Desde un punto de vista algebraico la supersimetría consiste en extender el álgebra de Poincaré mediante el agregado de generadores espinoriales-fermiónicos Q (cargas supersimétricas) [6]-[11]. La presencia de estas cargas conduce a que toda representación irreducible cuente con igual número de estados bosónicos y fermiónicos. El teorema Haag-Łopuszański-Sohnius [12] muestra que la máxima simetría unitaria que puede tener una teoría en interacción, es el producto directo de una simetría de gauge por el grupo generado por el álgebra de super-Poincaré, pudiendo contener este, en general, N cargas espinoriales (supersimetría extendida).

En principio, la motivación para el estudio de las teorías supersimétricas es puramente teórica. Sin embargo, han sido intensamente estudiadas pues presentan interesantes propiedades formales. En particular, tienen un comportamiento UV mejorado debido a la compensación de divergencias de las contribuciones bosónicas y fermiónicas (en ciertos modelos $N > 1$ es posible mostrar que las contribuciones perturbativas se anulan a partir de cierto orden). La invarianza supersimétrica impone fuertes vínculos en la construcción de posibles modelos, pudiéndose en ciertos casos hallar completamente la acción efectiva Wilsoniana de la teoría [13]. Desde un punto de vista fenomenológico, la incorporación de la supersimetría al modelo estándar mejora el comportamiento de las constantes de acoplamiento con la energía permitiendo la formulación de teorías de gran unificación.

Es sabido que en ciertos modelos bosónicos [14]-[17],[18]-[19] es posible encontrar soluciones a las ecuaciones de segundo orden de Euler-Lagrange considerando ecuaciones de primer orden, conocidas como ecuaciones BPS (por sus descubridores E. Bogomol'nyi, M.

Prasad y C. Sommerfield). El método estándar para obtener tales ecuaciones consiste en reescribir la expresión para la energía de una configuración de campo de manera que quede acotada inferiormente por una cantidad que tiene carácter topológico. Las configuraciones de campos que saturan tal cota satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange como así también las ecuaciones de BPS. A nivel clásico las soluciones de estas ecuaciones corresponden a multi-solitones o instantones [20].

Esta estructura se reinterpretó al aparecer en la extensión supersimétrica de dichos modelos, donde permitió además hacer predicciones exactas acerca del espectro cuántico de la teoría. En efecto, estudiando teorías supersimétricas donde el vacío es degenerado y en las cuales existen cargas topológicas no nulas (solitones) se observó [21],[22]-[24] que las extensiones centrales admitidas por el álgebra supersimétrica tienen lugar en los modelos, en términos de las cargas topológicas. La presencia de extensiones centrales en el álgebra super-Poincaré se indentificó entonces con la existencia de cargas topológicas en la teoría.

Esta observación permitió demostrar que la cota de Bogomol'nyi, mencionada mas arriba a nivel clásico, es válida a nivel cuántico, tomada como valor de expectación sobre cualquier estado físico, como consecuencia de la unitariedad de la teoría. Estudiando las representaciones irreducibles del álgebra supersimétrica se mostró que los estados que saturan la cota, conocidos como estados BPS, o sea estados cuya masa es igual a su carga topológica, presentan la propiedad de ser invariante frente a algunas de las cargas supersimétricas y de mantener a nivel cuántico la igualdad entre masa y carga. Las ecuaciones BPS aparecen entonces de imponer que dichas cargas sean nulas sobre el estado BPS (se llaman estados $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ -BPS a los estados que son invariantes frente a $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ del número total de supersimetrías). Las cargas no nulas actuando sobre el estado generan el resto de los estados del multiplete supersimétrico.

La teoría de cuerdas [25] tuvo su origen en un intento de describir las propiedades de las interacciones fuertes mediante la construcción del modelo resonante dual. Experimentalmente se observaba una enorme proliferación de hadrones (resonancias hadrónicas) que parecían tener espines indefinidamente altos. Una ley muy simple que relacionaba la masa con el espín (trayectorias de Regge). Rápidamente, sin embargo, quedó claro que la con-

sistencia del modelo resonante dual, luego reconocido como proveniente de la cuantificación de una cuerda relativista, predecía un conjunto de partículas no masivas que no incluía a la partícula pseudo-escalar necesaria en el límite quiral de las interacciones fuertes (pión). Este hecho, sumado a un decaimiento exponencial (en lugar de la observada ley de potencias) para las secciones eficaces de alto momento transferido, dejó en claro que las teorías de cuerdas no podían dar una descripción acabada de las interacciones fuertes. Entre 1973 y 1974 una teoría de campos, la cromodinámica cuántica, emergió como alternativa para la descripción de las interacciones fuertes explicando, entre otras cosas, el comportamiento de ley de potencias para las secciones eficaces.

Abandonada transitoriamente para describir las interacciones fuertes, aparecieron nuevas motivaciones en otros ámbitos para estudiar la rica estructura de las teorías de cuerdas. Su excelente comportamiento UV, la presencia de un estado no masivo de espín $s = 2$ (que podría asociarse con el gravitón) y la consistencia de la teoría para $d > 4$, sugirieron estudiar a la teoría de cuerdas como una posible teoría cuántica donde se encontrarían unificadas todas las interacciones conocidas incluyendo la gravedad [26]. El análisis de consistencia de la teoría requirió la introducción de la supersimetría. Con esta estructura adicional, la teoría nacida de los modelos duales pasó a llamarse teoría de supercuerdas.

Paralelamente a los estudios anteriormente citados Alexander Polyakov [27] formuló la teoría de cuerdas en términos de integrales funcionales, lo que permitió interpretar los antiguos resultados de consistencia de los modelos duales. Fue a partir de esta última formulación que la acción de Born-Infeld reapareció en nuestros días. En efecto, usando el formalismo de Polyakov, E. Fradkin y A. Tseytlin obtuvieron la acción de Born-Infeld como acción de baja energía para los modos vectoriales A_μ de la teoría de cuerdas abiertas [28]-[29]. Con condiciones de contorno de Neumann para los extremos de la cuerda acoplada a un campo de gauge abeliano, la acción de Born-Infeld se obtuvo en la aproximación a orden árbol (de la teoría de cuerdas) y en el límite de campos electromagnéticos cuasi-constantes (despreciando derivadas de $F_{\mu\nu}$).

Posteriormente, la acción de Born-Infeld fue obtenida mediante el método de campos de fondo, “background fields method” [30]. En este último trabajo se la obtuvo acoplando una

cuerda bosónica abierta, con condiciones de contorno de Neumann, a un campo abeliano de gauge y exigiendo invarianza conforme de la teoría (nuevamente en la aproximación a orden árbol para la teoría de cuerdas y en el límite de campos electromagnéticos cuasi-constantes). La invarianza conforme implica la anulación de las funciones beta (Callan-Zymanzik), las cuales dan ecuaciones de movimiento para $F_{\mu\nu}$. A partir de éstas es posible derivar una acción efectiva, que coincide con la de Born-Infeld obtenida en [28]. Lo notable de ambos cálculos es que el resultado obtenido es exacto en α' , al orden calculado.

En 1989, estudiando la teoría de cuerdas bosónicas compactificada toroidalmente, se concluyó [31] que la teoría de cuerdas debería contener objetos macroscópicos extendidos en p -dimensiones espaciales. Se llamó a estos objetos D p -branas y se determinó que interactuaban en el límite de bajas energías con cuerdas abiertas y cerradas. Inmediatamente, usando la técnica de campos de fondo, se dedujo en [32] la acción efectiva para los modos no masivos (provenientes del sector de cuerdas abiertas) de estos objetos “solitónicos”. La misma se obtuvo pidiendo invarianza conforme a una teoría de cuerdas abiertas con condiciones de contorno mixtas Neumann-Dirichlet para los extremos de las cuerdas¹. El resultado que se obtuvo para $(p+1)$ -coordenadas X^μ con condiciones de Neumann y $(26-(p+1))$ -coordenadas X^i con condiciones Dirichlet fue la acción de Dirac-Born-Infeld en $(p+1)$ -dimensiones. En el caso supersimétrico (teoría de supercuerdas), la dinámica de bajas energías para la D p -brana contiene entonces en su parte bosónica $10-(p+1)$ campos escalares (modos de Dirichlet) que se interpretan como las oscilaciones de la D p -brana sumergida en el espacio-tiempo 10-dimensional, junto con un campo de gauge contenido en el volumen de mundo de la D p -brana (modos de Neumann).

La importancia de estos estados para la teoría de supercuerdas no se advirtió hasta que Joseph Polchinski descubrió que estaban cargados frente a ciertas $(p+1)$ -formas contenidas en la teoría [33]-[34]. El cálculo mostró que las D p -branas son objetos no perturbativos que satisfacen una generalización de la igualdad entre masa y carga. El trabajo de Polchinski mostró también que las D p -branas son un nuevo tipo de solitones de la teoría de cuerdas. En

¹El formalismo tradicional fijaba condiciones de Neumann en los extremos de la cuerda, debido a que son invariantes de Lorentz. Las condiciones de Dirichlet para los extremos de la cuerda no son invariantes Lorentz, lo cual es natural si estamos en presencia de un solitón.

particular, su tensión (“masa”) es inversamente proporcional a la constante de acoplamiento de las cuerdas $T \sim 1/g$ (a diferencia de los solitones usuales cuya masa $M \sim 1/g^2$), y que admiten una descripción muy simple y exacta como hipersuperficies donde pueden terminar cuerdas abiertas. Las Dp-branas son los estados de la teoría cargados respecto de (p+1)-formas y debido al trabajo de R. Leigh [32], la dinámica de bajas energías está dada por la acción de Dirac-Born-Infeld. Es posible ver que ciertas soluciones clásicas solitónicas halladas en el contexto de SUGRA+SYM corresponden a la descripción macroscópica de una superposición de Dp-branas [35].

En 1995 Edward Witten [36] mostró la necesidad de extender, en el contexto de D-branas superpuestas, la acción de Born-Infeld al caso no abeliano. En la citada referencia se mostró que al superponer \mathcal{N} Dp-branas el espectro no masivo se modifica de manera tal que la acción efectiva para la configuración debe ser descripta por una teoría de gauge con grupo $U(\mathcal{N})$. Dado que la acción de bajas energías para una Dp-brana es la acción de Dirac-Born-Infeld, es natural conjeturar que en el caso de \mathcal{N} Dp-branas, la teoría efectiva será la generalización no abeliana de la teoría de Dirac-Born-Infeld con grupo de gauge $U(\mathcal{N})$. En el contexto de supercuerdas es entonces importante tener una definición para la acción no abeliana de Born-Infeld ya que brindaría la posibilidad de estudiar el límite de bajas energías de un conjunto de D-branas superpuestas. Esta definición debe ser compatible con supersimetría.

Con el trabajo de Polchinski [33] en mente y basados en argumentos debidos a Andrew Strominger [37], Curtis Callan y Juan Maldacena estudiaron soluciones clásicas de la acción de Dirac-Born-Infeld [38]. Las soluciones las hallaron usando argumentos BPS (ver cap. 2) y correspondían para la teoría (p+1)-dimensional, al potencial coulombiano de un electrón puntual junto con la excitación de un campo escalar. Computando la energía [38] interpretaron desde la perspectiva de la teoría de cuerdas al electrón en el volumen de mundo de la Dp-brana como la intersección de una cuerda fundamental con la Dp-brana. La autoenergía infinita de la solución se debe a la extensión semi-infinita de la cuerda que intersecta la Dp-brana. Simultáneamente al trabajo anterior, Gary Gibbons [39] encontró las mismas soluciones, mostrando cómo las soluciones BPS separan naturalmente dos familias mas generales de soluciones.

Con el objeto de validar la imagen de Polchinski respecto de las Dp-branas, en [38] se investigó la propagación de una perturbación normal tanto a la cuerda como a la D3-brana para una solución de fondo de tipo BPS. El resultado obtenido fue el esperado, esto es, la condición efectiva para la cuerda sujeta a la brana es del tipo Dirichlet. Posteriormente, en [40] se construyeron soluciones no-BPS eléctricas para la acción de DBI y se discutieron también soluciones BPS magnéticas. Un estudio detallado de las soluciones BPS diónicas fue presentado en [41].

Los trabajos descriptos en esta tesis tratan de dar respuesta a algunos de los problemas discutidos mas arriba. Así, en el capítulo 4 construiremos la extensión supersimétrica $N = 2$ del modelo abeliano de Born-Infeld-Higgs en tres dimensiones espacio-temporales. Discutiremos la cota de Bogomol'nyi y las ecuaciones BPS del modelo, comparándolas con las conocidas soluciones de vórtice del modelo supersimétrico de Maxwell-Higgs [15],[23]. Analizaremos también la sensibilidad de las ecuaciones BPS en modelos no polinómicos generales para el campo de gauge. En el capítulo 5 discutiremos la extensión no abeliana de la acción de Born-Infeld en conexión con supersimetría. El primer paso en la construcción de la teoría de Born-Infeld no abeliana consiste en reemplazar el tensor de campo $F_{\mu\nu}$ por su extensión no abeliana $F_{\mu\nu}^a t^a$ y reemplazar la métrica $g_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu} \mathcal{I}$ donde \mathcal{I} es la matriz identidad en el espacio del grupo. Luego, dado que el lagrangiano debe ser un escalar tanto en el espacio-tiempo como en el grupo, es necesario incluir una operación de “traza” (o determinante) sobre los índices de grupo. Existen en la literatura trabajos que sugieren distintas prescripciones para la traza[42]-[44]; discutiremos en particular la sugerencia de A. Tseytlin [44] de simetrizar los generadores del grupo, debido a la observación [46] de que es posible establecer una cota de Bogomol'nyi para dicha acción, lo que sugiere que la misma sería supersimetrizable. En el capítulo 6 nos concentraremos en el caso de D3-branas y construiremos explícitamente soluciones diónicas no-BPS con el campo de gauge $U(1)$ acoplado a un campo escalar. Analizaremos luego las soluciones en conexión con la geometría de la deformación de la brana por efecto de la tensión de la cuerda- (n, m) que soporta cargas eléctricas y magnéticas [36],[47]. Estudiando la energía de estas configuraciones no-BPS, compararemos los resultados con los obtenidos en los casos BPS y no-BPS

puramente eléctricos [38]-[41]. Estudiaremos también pequeñas excitaciones, transversales tanto a la brana como a la cuerda, de manera de examinar si la respuesta de las soluciones no-BPS es consistente con la interpretación en la cual el sistema D3-brana+cuerda descrito corresponde a las condiciones de borde adecuadas (Dirichlet).

Chapter 2

Ideas básicas

Discutiremos varias ideas que es necesario precisar para el desarrollo de la tesis.

2.1 La Teoría de Born-Infeld

El lagrangiano propuesto por Born e Infeld tiene la forma [2]¹

$$\mathcal{L}_{BI} = \beta^2 \left(\sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} - \sqrt{-\det\left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{\beta} F_{\mu\nu}\right)} \right) \quad (2.1)$$

$$= \beta^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)} - \frac{1}{\beta^4}(\vec{E} \cdot \vec{B})^2 \right) \quad (2.2)$$

La segunda línea se obtiene en el caso de espacio de Minkowski, $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$.

El punto esencial en la teoría de BI es la diferencia entre el campo eléctrico (ponderomotoriz) \vec{E} y el vector de desplazamiento (inducción) \vec{D} . El electrón de BI que denominaremos BIón satisface

$$\text{div} \vec{D} = q_e \delta^{(3)}(\vec{r}) \quad (2.3)$$

Obviamente \vec{D} diverge en el origen, pero dado que en ausencia de campos magnéticos, el campo eléctrico \vec{E} y el vector de desplazamiento \vec{D} están relacionados por

$$\vec{D} = \left. \frac{\delta \mathcal{L}_{BI}}{\delta \vec{E}} \right|_{\vec{B}=0} = \frac{\vec{E}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2} \vec{E}^2}} \implies \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2} \vec{D}^2}} \quad (2.4)$$

vemos que el valor del campo eléctrico en el origen, donde esta situada la fuente, es finito $\vec{E}(\vec{r}=0) = \beta$. Esta propiedad conduce, al calcular la energía de la solución, a un resultado finito (ver cap. 6).

¹Ver apéndice A para una descripción mas detallada de la propuesta original.

Sintetizando, para soluciones puramente eléctricas tenemos:

Teoría de Maxwell

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{1}{2}\vec{E}^2 &\implies \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = q \delta^{(3)} \longrightarrow \vec{E} \sim \frac{q}{r^2} \\ \vec{D} = \vec{E} &\implies E = \int d^3x \frac{1}{2}\vec{E}^2 \sim \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{q^2}{\Lambda} \quad (\text{divergente})\end{aligned}$$

Teoría de Born-Infeld

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \beta^2(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2}\vec{E}^2}) &\implies \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = q\delta \longrightarrow \vec{E} \sim \frac{q}{\sqrt{r^4 + q^2/\beta^2}} \\ \vec{D} = \frac{\vec{E}}{\sqrt{1 - \vec{E}^2/\beta^2}} &\implies E = \int d^3x (\vec{D} \cdot \vec{E} - \mathcal{L}) \sim q^{3/2}\beta^{1/2} \quad (\text{finita})\end{aligned}$$

2.2 Acción de Born-Infeld en teoría de cuerdas

Veamos sintéticamente la derivación de la acción de BI en el contexto de la teoría de cuerdas siguiendo [28]. La acción efectiva off-shell para los modos no masivos de una teoría bosónica de cuerdas abiertas y cerradas se define, en espacio euclídeo, como

$$\Gamma[\phi, A_\mu, g_{\mu\nu}, b_{\mu\nu}] = \sum_{\chi=2,1,0,-1,\dots} g_{op}^{-2\chi} \int \mathcal{D}h_{ab} \mathcal{D}X^\mu e^{-S_1 - S_2} \quad (2.5)$$

$$S_1 = \int_{\mathcal{M}} d^2z \left(\frac{1}{4\pi\alpha'} \sqrt{h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu} + i\varepsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu b_{\mu\nu} + \frac{1}{4\pi} \sqrt{h} R \phi \right) \quad (2.6)$$

$$S_2 = i \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau \dot{X}^\mu A_\mu \quad (2.7)$$

Aquí los X^μ describen el embedding de la hoja de mundo \mathcal{M} de la cuerda en el espacio-tiempo ($\mu, \nu = 1, \dots, D$), z^a ($a=1,2$) son las coordenadas de \mathcal{M} , h_{ab} es la métrica en \mathcal{M} , R es la curvatura escalar de h_{ab} , $\partial\mathcal{M}$ es el borde de \mathcal{M} parametrizado por τ y g_{op} es la constante de acoplamiento respecto de cual está definida la teoría perturbativa. En (2.5) se suma sobre todas las posibles hojas de mundo virtuales \mathcal{M} compactas, orientables y con borde $\partial\mathcal{M}$, las cuales topológicamente corresponden a discos con un número arbitrario de bordes n ($\partial\mathcal{M} = \cup_{i=1}^n \gamma_i$) y manijas k ($\chi = 2 - 2k - n$) (\mathcal{M} tiene la topología de un disco en la aproximación a orden árbol, un anillo a un loop,..., luego, la expansión en (2.5)

corresponde a una expansión en las clases topológicas). En cada clase topológica fijamos el borde, integramos sobre todas las posibles superficies con condiciones de contorno fijas $X^\mu(z)|_{\partial\mathcal{M}} = c^\mu(\tau)$ y luego sumamos sobre todas las posibles curvas de borde $c^\mu(\tau)$. Las cuerdas (abiertas y cerradas) se mueve sobre campos de fondo correspondientes a sus modos no masivos: el dilatón ϕ , el campo vectorial A_μ , el gravitón $g_{\mu\nu}$ y el tensor antisimétrico $b_{\mu\nu}$.

La acción efectiva definida por (2.5) se puede interpretar de distintas formas. Una primera interpretación es que (2.5) es la generatriz funcional de las amplitudes de scattering off-shell sobre fondos arbitrarios: derivando respecto de las fuentes ϕ, A_μ, \dots obtenemos el valor de expectación de los correspondientes operadores de vértice para una cuerda propagándose en un fondo de campos ϕ, A_μ, \dots (poniendo a cero las fuentes luego de derivar y fijando las condiciones de capa de masa obtenemos las funciones de correlación para los modos no masivos de la cuerda on-shell). Una segunda interpretación es que Γ en (2.5) es el análogo directo de la acción efectiva estándar en teoría de campos (generatriz funcional de las funciones de Green irreducibles), esto significa que contiene toda la dinámica cuántica y no debe ser, consecuentemente, cuantizada. El punto es que los argumentos de Γ son los valores de fondo para los campos (correspondientes a modos virtuales de cuerdas) que se propagan en loops (manijas y agujeros en la hoja de mundo corresponden al análogo de los lazos en teoría de campos). Dado que esta formulación es off-shell, el vacío de la teoría se halla minimizando Γ

$$\delta\Gamma/\delta\phi = 0, \quad \delta\Gamma/\delta A_\mu = 0, \quad \delta\Gamma/\delta g_{\mu\nu} = 0, \dots \quad (2.8)$$

Confirmar que el vacío es estable significa corroborar la ausencia de fantasmas y taquiones en el espectro de pequeñas fluctuaciones y la consistencia de las amplitudes de n-puntos al ser calculadas sobre el fondo correspondiente. Un posible criterio necesario de consistencia es la invarianza conforme de $S_1 + S_2$ definidas por (2.6)-(2.7) cuando tomamos como campos de fondo de la cuerda las soluciones de (2.8) (este fue el método utilizado en [30] para hallar la acción de BI).

Para obtener la acción de BI en el contexto de la cuerda bosónica² nos restringiremos por simplicidad a fondos triviales para los campos que provienen del sector de cuerdas cerradas

²Es posible realizar un cálculo similar en la teoría de supercuerdas, obteniéndose el mismo resultado [29].

($g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}, \phi = b_{\mu\nu} = 0$). Nos limitaremos también al cálculo a orden árbol, $\chi = 1$ (disco), para la cuerda bosónica en $D = 26$. Elegimos condiciones de contorno de Neumann en todas las direcciones, para los extremos de la cuerda. Siendo la integral sobre las métricas h_{ab} trivial, separamos X^μ en parte constante y no constante, $X^\mu = x^\mu + \xi^\mu$, quedando

$$\int \mathcal{D}X^\mu e^{-S_1 - S_2} = \int d^D x \int \mathcal{D}\xi^\mu \exp\left(-\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2 z \partial_a \xi^\mu \partial_a \xi^\mu - i \int d\tau \dot{\xi}^\mu A_\mu(x + \xi)\right) \quad (2.9)$$

donde las funciones $\xi^\mu(z)$ representan fluctuaciones de la hoja de mundo \mathcal{M} de la cuerda que satisfacen condiciones de contorno de Neumann. La factorización que permite reescribir a Γ como una integral sobre el espacio tiempo \mathbb{R}^D se basa en que la acción para la cuerda libre (2.6) con $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ es invariante frente a traslaciones $X^\mu \rightarrow X^\mu + a^\mu$ con $a^\mu = cte$. Luego la función de partición $\Gamma[0, 0, \delta_{\mu\nu}, 0]$ contiene la contribución de estos modos cero (el volumen de \mathbb{R}^D) como un factor. Esta invarianza se rompe en presencia de un fondo no trivial de manera que la integral sobre \mathbb{R}^D no se factoriza. Procedamos a evaluar la integral funcional en todos los puntos interiores de \mathcal{M} , reduciendo (2.9) a una integral sobre la frontera. A tal efecto introducimos las variables $\eta^\mu(\tau)$ definidas como la restricción de ξ^μ a la frontera (el borde del disco) $\partial\mathcal{M} = S^1$. Insertando en la integral funcional (2.9) el siguiente “1”

$$1 = \int \mathcal{D}\eta^\mu \delta(\xi^\mu|_{\partial\mathcal{M}} - \eta^\mu) \quad (2.10)$$

y representando la función δ mediante una integral funcional sobre $\nu_\mu(\tau)$, llegamos a una expresión gaussiana para los campos de integración ξ^μ y ν_μ

$$\int \mathcal{D}\xi^\mu e^{-S_1 - S_2[\xi|_{\partial\mathcal{M}}]} = \int \mathcal{D}\xi^\mu \mathcal{D}\eta^\mu \mathcal{D}\nu_\mu \exp\left(-\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2 z \partial_a \xi^\mu \partial_a \xi^\mu - i \int d\tau \dot{\eta}^\mu A_\mu(x + \eta) - \int d\tau \nu_\mu (\xi^\mu|_{\partial\mathcal{M}} - \eta^\mu)\right) \quad (2.11)$$

Integrando los campos gaussianos obtenemos

$$\int \mathcal{D}\eta^\mu \exp\left(-\frac{1}{4\pi\alpha'} \eta G^{-1} \eta - i \int d\tau \dot{\eta}^\mu A_\mu(x + \eta)\right) \quad (2.12)$$

donde

$$\eta G^{-1} \eta = \int d\tau d\tau' \eta^\mu(\tau) G^{-1}(\tau, \tau') \eta^\mu(\tau') \quad (2.13)$$

y G^{-1} esta definida de la siguiente manera. Encontrada la función de Neumann $N(z, z')$ para el operador de Laplace $\square = \partial_a \partial_a$, $\square N = -\delta^{(2)}(z - z')$, calculamos la restricción de la misma

a la frontera del disco $\partial\mathcal{M}$, $G(\tau, \tau') = N(z(\tau), z'(\tau'))$. G^{-1} es la inversa de este último operador, $G^{-1}G = \delta^{(1)}(\tau - \tau')$. La integral (2.12) contiene, en general, en el exponente, infinitas potencias de η . Expandiendo A_μ en potencias de η tenemos

$$\int d\tau \dot{\eta}^\mu A^\mu(x + \eta) = \frac{1}{2} F_{\nu\mu}(x) \int d\tau \dot{\eta}^\mu \eta^\nu + \frac{1}{3} \partial_\rho F_{\nu\mu}(x) \int d\tau \dot{\eta}^\mu \eta^\nu \eta^\rho + \mathcal{O}(\partial^2 F, \eta^4) \quad (2.14)$$

En general, la acción efectiva $\Gamma[A_\mu] = \int d^D x \mathcal{L}(x)$, dependerá de $F_{\mu\nu}$ y todas sus derivadas. En la aproximación $F_{\mu\nu}(x) = \text{cte.}$ ($\partial^{(n)} F \approx 0$), la integral que nos queda en η^μ es gaussiana

$$\int \mathcal{D}\eta^\mu \exp \left(-\frac{1}{4\pi\alpha} \eta G^{-1} \eta + \frac{i}{2} F_{\mu\nu} \int d\tau \dot{\eta}^\mu \eta^\nu \right) \quad (2.15)$$

Llevando $F_{\mu\nu}$ a la forma estándar $F = \epsilon \otimes f$, donde ϵ son matrices antimétricas 2×2 y f es una matriz diagonal con autovalores f_i ($i = 1, \dots, \frac{D}{2}$), el calculo se reduce al producto

$$\prod_{i=1}^{D/2} \int \mathcal{D}\eta_i \exp \left(-\frac{1}{2} \eta_i G^{-1} \eta_i - \frac{1}{2} \tilde{f}_i^2 \dot{\eta}_i G \dot{\eta}_i \right) = \prod_{i=1}^{D/2} \int \mathcal{D}\eta_i \exp \left(-\frac{1}{2} \eta_i G^{-1} \eta_i - \frac{1}{2} \tilde{f}_i^2 \eta_i \ddot{G} \eta_i \right) \quad (2.16)$$

donde hemos reescalado $\eta \rightarrow \sqrt{2\pi\alpha} \eta$ y $\tilde{f}_k = 2\pi\alpha f_k$. En la última expresión debe entenderse $\ddot{G} = (d^2/d\tau d\tau') G(\tau, \tau')$. La acción efectiva para los modos vectoriales no masivos $\Gamma(A_\mu)$ queda [28]³

$$\Gamma[A_\mu] = \frac{Z(0)}{g_{cl}} \int d^D x \prod_{i=1}^{D/2} \frac{1}{\sqrt{\det \Delta_i}} \quad (2.17)$$

$$Z(0) = \int \mathcal{D}\xi^\mu e^{-S_1}, \quad \Delta_i = 1 + \tilde{f}_i^2 \ddot{G} \cdot G \quad (2.18)$$

Dado que para el caso del disco unitario

$$N(z, z') = -\frac{1}{2\pi} \ln |z - z'| |z - \bar{z}'^{-1}| \implies G(\theta, \theta') = N(e^{i\theta}, e^{i\theta'}) = -\frac{1}{2\pi} \ln(2 - 2 \cos \zeta) \quad (2.19)$$

donde $\zeta = \theta - \theta'$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, entonces

$$\ddot{G} \cdot G = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\zeta \equiv \delta(\zeta) \implies \prod_{i=1}^{D/2} \frac{1}{\sqrt{\det \Delta_i}} = \prod_{i=1}^{D/2} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{f}_i^2}} = \prod_{i=1}^{D/2} \sqrt{1 + \tilde{f}_i^2} \quad (2.20)$$

donde en el último paso regularizamos el producto infinito usando la función ζ de Riemann. La acción efectiva (2.17) para los modos vectoriales no masivos a orden árbol en teoría de

³Expresamos la acción efectiva, como es convencional, en términos de la constante de acoplamiento g_{cl} para cuerdas cerradas, recordando que $g_{op}^2 = g_{cl}$.

cuerdas, resulta ser la acción de Born-Infeld [28]

$$\Gamma[A_\mu] = \frac{Z_0}{\alpha^{D/2} g_{cl}} \int d^D x \sqrt{\det(\delta_{\mu\nu} + 2\pi\alpha F_{\mu\nu})} \quad (2.21)$$

Aquí $Z_0 = \text{cte.}$ es la función de partición libre para el disco y hemos factorizado la dependencia en α . Al ser deducido de la teoría de cuerdas, el parámetro de Born-Infeld β que determina el valor máximo de campo resulta ser igual a la tensión de las cuerdas fundamentales $\beta = T$.

2.3 La teoría de Dirac-Born-Infeld y Dp-branas

La acción de Dirac-Born-Infeld en $p + 1$ dimensiones, correspondiente a la acción efectiva (bajas energías) de una Dp-brana, se define como

$$S_{DBI} = -T_p \int d^{p+1}x \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + 2\pi\alpha F_{\mu\nu})} \quad (2.22)$$

donde

$$g_{\mu\nu} = (\partial X^M / \partial x^\mu)(\partial X^N / \partial x^\nu) G_{MN} \quad (2.23)$$

($\mu, \nu = 0, \dots, p; M, N = 0, \dots, D-1$). G_{MN} es la métrica del espacio-tiempo D-dimensional donde se encuentra embebida la brana, $X^M = X^M(x^\mu)$ representan la posición de la p-brana en el espacio-tiempo D-dimensional y $g_{\mu\nu}$ se interpreta como la métrica inducida sobre la superficie de la brana por la métrica del espacio ambiente G_{MN} . $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor electromagnético correspondiente al campo de gauge contenido en el volumen de mundo de la brana y T_p es la tensión de la Dp-brana.

La acción (2.22) es invariante frente a reparametrizaciones en su volumen de mundo. Al fijar esta invarianza, por ejemplo en el gauge estático (ver cap. 5) aparecen los campos escalares que corresponden a las oscilaciones transversales de la brana. La acción (2.22) con $F_{\mu\nu} = 0$ coincide con el modelo para el electrón propuesto por Dirac [48] donde se lo representaba como una cáscara (2-brana) cargada. La tensión que tiende a contraer la superficie contraresta la repulsión coulombiana que experimenta la misma. La idea de Dirac de representar distintas partículas (electrón y muón) como estados excitados de un mismo objeto fundamental es anterior a la teoría de cuerdas. Paradójicamente las membranas (2-branas)

reaparecieron recientemente en el contexto de teoría M como los objetos fundamentales de la acción de bajas energías (SUGRA $d = 11$).

Una $(p+1)$ -forma $A_{p+1} = A_{M_1 M_2 \dots M_{p+1}} dX^{M_1} \wedge dX^{M_2} \dots \wedge dX^{M_{p+1}}$ se acopla naturalmente a una p -brana, esto es un objeto extendido con p dimensiones espaciales. El acoplamiento es la integral de la $(p+1)$ -forma sobre el volumen de mundo $(p+1)$ -dimensional de la p -brana

$$S_{WZ} = \rho_p \int_{v.m.} A_{p+1} \equiv \rho_p \int d^{p+1}x A_{M_1 M_2 \dots M_{p+1}}(X) \partial_1 X^{M_1} \partial_2 X^{M_2} \dots \partial_{p+1} X^{M_{p+1}} \quad (2.24)$$

ρ_p es la densidad de carga de la p -brana y denotamos $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$. Por ejemplo: una partícula puntual o 0-brana describe una trayectoria unidimensional en el espacio tiempo y se acopla a un campo vectorial A_M , el objeto cargado frente a un tensor de dos índices antisimétrico es una cuerda o 1-brana ya que describe en el espacio tiempo una superficie bidimensional. En la teoría perturbativa de supercuerdas no existen estados (p -branas) con $p \neq 1$, solo contamos con cuerdas fundamentales (1-branas) que de hecho son las cargas elementales para el tensor antisimétrico $b_{\mu\nu}$. El hecho de que no existan estados perturbativos cargados respecto de los campos bosónicos de Ramond se sigue de que el vértice cúbico $\langle string | A_{p+1} | string \rangle$, que representa la emisión de un estado R-R a partir de un estado de cuerda fundamental, involucra un número impar de vértices fermiónicos izquierdos (y derechos), luego la amplitud de emisión se cancela automáticamente a todo orden en la teoría perturbativa. Este argumento muestra que las cuerdas no se acoplan eléctricamente a la 2-forma R-R, presente en la teoría IIA. En presencia de fronteras (Dp-branas) este argumento falla. La propiedad $\frac{1}{2}$ -BPS (multiplete corto, ver cap. 3) para una Dp-brana estática, se sigue de

$$T_p = \rho_p \quad (2.25)$$

y del análisis del álgebra supersimétrica al ser extendida para contemplar cargas centrales tensoriales [49]. La acción completa para la Dp-brana (2.22) debe entonces ser corregida sumándosele el término de Wess-Zumino (2.24), correspondiente al acoplamiento de la Dp-brana con la $(p+1)$ -forma, este término sin embargo no afecta las ecuaciones de movimiento para los campos.

2.4 El electrón à la Strominger-Callan-Maldacena

Los argumentos de C. Callan y J. Maldacena (CM) para hallar soluciones a la acción de DBI fueron los siguientes [38]: a partir de la variación supersimétrica del gaugino (obtenida por reducción dimensional)

$$\delta\lambda = \Gamma^{MN} F_{MN} \epsilon = (\Gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + 2\Gamma^{\mu i} \partial_\mu X_i) \epsilon \quad , \quad (2.26)$$

un background BPS corresponde a $\delta\lambda = 0$ para algún $\epsilon \neq 0$. Si estamos interesados en soluciones de Coulomb $A_0 = q_e/4\pi r^{p-2}$, vemos de (2.26) que si proponemos $X_9 = q_e/4\pi r^{p-2} \implies F_{9r} \equiv \partial_r X^9 = F_{0r}$, tenemos

$$(\Gamma^{0r} + \Gamma^{9r}) \epsilon = 0 \implies (\Gamma^0 + \Gamma^9) \epsilon = 0 \quad (2.27)$$

Esta ecuación tiene soluciones no triviales para la mitad de las componentes de ϵ , de lo que concluimos que nuestra solución es 1/2-BPS (dichos $\epsilon \neq 0$ no alteran la solución o como se dice usualmente nuestra solución preserva la mitad de las supersimetrías). Las soluciones propuestas por CM corresponden a soluciones del modelo DBI linealizado o sea son soluciones del modelo Maxwell-Higgs (MH) (ver discusión mas abajo).

Computando la energía (ver cap. 6) se llega a la conclusión de que el electrón BPS con potencial coulombiano (lo que implica excitar un campo escalar) en el volumen de mundo de la brana, debe ser interpretado al embeber la brana en $D = 10$ como la intersección de una cuerda fundamental con la Dp-brana. La autoenergía infinta de la solución se debe a la extensión semi-infinita de la cuerda que intersecta la Dp-brana. Notemos que el estado BPS no manifiesta energía de interacción, la energía del estado es la suma de las energías de sus constituyentes. Esto se observa también al tratar soluciones BPS mas generales centradas en varios puntos.

Recalquemos una propiedad muy importante y general de todas las soluciones BPS: la energía de las mismas es simplemente su carga topológica. Esto indica que para soluciones BPS, la energía es independientes de la dinámica asociada con dichas soluciones (ver cap. 4). La presente solución fue calculada para la acción de MH y sin embargo resulta ser también solución de la acción DBI. En el capítulo 4 discutiremos en un contexto mas sencillo este

mismo fenómeno: la insensibilidad de las ecuaciones BPS respecto a la dinámica asociada al campo de gauge.

Chapter 3

La supersimetría y sus representaciones

Discutiremos la supersimetría y sus representaciones

3.1 Introducción

A mediados de los '60, la creciente importancia de los grupos de simetrías internas como $SU(2)$, $SU(3)$, ... llevó a los físicos a investigar sobre la posibilidad de combinar, de manera no trivial, el grupo de Poincaré del espacio-tiempo con un grupo de simetría interna. Luego de varios intentos frustrados, el interrogante fue resuelto por S. Coleman y J. Mandula de manera negativa en el llamado “no-go theorem” [50]: en $d > 2$, una teoría cuántica relativista, con un espectro discreto de estados masivos de una partícula y con amplitudes de dispersión no nulas, tiene como únicas cargas tensoriales conservadas, el cuadrivector energía-impulso P_μ y el tensor de momento angular $M_{\mu\nu}$; o sea los generadores del grupo de Poincaré¹. *El resto de las cargas conservadas deben ser escalares de Lorentz.* Como regla, estas cargas escalares de Lorentz deben satisfacer el álgebra de un grupo de Lie semi-simple que puede contener factores $U(1)$ adicionales.

Es conveniente hacer algunos comentarios acerca del teorema “no-go”. Si consideramos la dispersión de dos cuerpos, una vez tenida en cuenta la conservación de impulso angular y de energía, la única variable libre es el ángulo de dispersión θ . Si existiera un grupo de Lie que transformara no trivialmente frente al grupo de Poincaré, tendríamos generadores

¹En presencia de partículas no masivas es posible extender el grupo de Poincaré al grupo conforme [51].

adicionales (de caracter tensorial) asociados al espacio-tiempo. Las leyes de conservación resultantes limitarían la amplitud de dispersión de dos cuerpos, de manera que el ángulo θ tomaría solo valores discretos. Sin embargo, el proceso de dispersión se supone analítico en el ángulo θ , de manera que debemos concluir que, de existir estas cargas adicionales, el proceso no depende del ángulo. En síntesis, si existe un grupo de Lie combinado no trivialmente con el grupo de Poincaré, la dinámica resultante para los procesos de dispersión es trivial.

Los argumentos anteriores muestran la imposibilidad de simetrías no triviales que conecten partículas de distintos espines, si *todas* las partículas tienen espín entero o *todas* tienen espín semientero. Si tuviéramos una simetría que conectase partículas de espín entero con partículas de espín semientero, tendríamos cargas de caracter espinorial y el teorema “no-go” no sería aplicable. El cambio es drástico. Estas cargas espinoriales estarían dadas por integrales espaciales de campos espinoriales locales. La conexión espín-estadística en la teoría cuántica de campos dice que para separaciones tipo espacio los campos espinoriales anticonmutan. Luego, la conexión espín-estadística dicta que es el anticonmutador de las cargas el que está determinado, de manera que estamos forzados a inventar un nuevo tipo de álgebra de Lie donde la operación $[\cdot, \cdot]$ no siempre es antisimétrica (como en un conmutador), sino que ocasionalmente puede ser simétrica (como el anticonmutador). Este tipo de álgebras se denominan super-álgebras de Lie o álgebras gradadas.

En este espíritu, Y. Golfand y E. Likhtman [4] demostraron que, generalizando el concepto de grupo de Lie, era posible encontrar un grupo de simetría que incluyera al grupo de Poincaré, y a un grupo de simetría interna de manera no trivial. Nuestra discusión de la supersimetría seguirá este punto de vista.

Dado que la estructura de un grupo de Lie, al menos en un entorno de la identidad, está determinada por su álgebra de Lie, introducimos generadores Q_α y sus adjuntos $\bar{Q}_{\dot{\beta}}$ (en notación de Weyl, ver apéndice para las convenciones), transformando en las representaciones (espinoriales) del grupo de Lorentz $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$, que satisfacen relaciones de anti-conmutación²

$$\{Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} = Q_\alpha^A \bar{Q}_{\dot{\beta}B} + \bar{Q}_{\dot{\beta}B} Q_\alpha^A \quad (3.1)$$

²Por convención, los índices A, B se colocan abajo al tratar espinores pertenecientes a la representación $(0, \frac{1}{2})$.

$$= 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\mu} P_{\mu} \delta_B^A \quad (3.2)$$

(los índices adicionales $A, B = 1, \dots, N$ caracterizan extensiones con un número N de supersimetrías). El lado derecho de la ec.(3.2) se obtiene basándose en consideraciones de simetría frente al grupo de Lorentz, ya que debe transformar como $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, y hermiticidad. Asumamos entonces que el grupo de supersimetría contiene generadores “bosónicos” $P_{\mu}, M_{\mu\nu}, T_s$, que satisfacen reglas de conmutación, así como generadores fermiónicos Q_{α}^A ($A = 1, 2, \dots, N$) que satisfacen reglas de anti-conmutación. La generalización del teorema de Coleman-Mandula incluyendo generadores espinoriales efectuada por Haag-Łopuszański-Sohnius muestra que el álgebra de simetría más general que puede tener la matriz S es [12],

$$[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0 \quad (3.3)$$

$$[M_{\mu\nu}, P_{\rho}] = i(\eta_{\nu\rho}P_{\mu} - \eta_{\mu\rho}P_{\nu}) \quad (3.4)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} \quad (3.5)$$

$$- \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}) \quad (3.6)$$

$$[T_{\ell}, T_k] = iC_{\ell k}^j T_j \quad (3.7)$$

$$[P_{\mu}, T_{\ell}] = [M_{\mu\nu}, T_{\ell}] = 0 \quad (3.8)$$

$$\{Q_{\alpha}^A, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\mu} P_{\mu} \delta_B^A \quad (3.9)$$

$$\{Q_{\alpha}^A, Q_{\beta}^B\} = 2\epsilon_{\alpha\beta} Z^{AB} \quad (3.10)$$

$$\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}A}, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} = -2\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} Z_{AB}^* \quad (3.11)$$

$$[Q_{\alpha}^A, P_{\mu}] = [\bar{Q}_{\dot{\alpha}A}, P_{\mu}] = 0 \quad (3.12)$$

$$[Q_{\alpha}^A, M_{\mu\nu}] = (\sigma_{\mu\nu})_{\alpha}^{\beta} Q_{\beta}^A \quad (3.13)$$

$$[\bar{Q}_{\dot{\alpha}A}, M_{\mu\nu}] = (\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{Q}_{\dot{\beta}A} \quad (3.14)$$

$$[Q_{\alpha}^A, T_{\ell}] = S_{\ell}^A{}^B Q_{\alpha}^B \quad (3.15)$$

$$[\bar{Q}_{\dot{\alpha}A}, T_{\ell}] = -S_{\ell A}^{*B} \bar{Q}_{\dot{\alpha}B} \quad (3.16)$$

donde los escalares complejos de Lorentz $Z^{AB} = U^{AB} + iV^{AB}$ se denominan cargas centrales y son antisimétricos en A, B ³. Mediante el uso de las identidades de Jacobi se muestra que conmutan con todos los elementos del álgebra super-Poincaré y que generan una subálgebra

³Tomamos la convención [6] $Z^{AB} = -Z_{AB}$

abeliana invariante, contenida en el álgebra de Lie generada por los T_ℓ ⁴. Las podemos expresar entonces como

$$Z^{AB} = a^{\ell AB} T_\ell \quad (3.17)$$

donde a^ℓ son matrices antisimétricas. S_ℓ, a_ℓ deben satisfacer

$$S_\ell^A{}_C a^{kCB} = -a^{kAC} S_\ell^{*B}{}_C \quad (3.18)$$

Las relaciones (3.8) son consecuencia del teorema de Coleman-Mandula. Las ecs.(3.12)-(3.14) establecen que las supercargas $Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\alpha}A}$ transforman como espinores frente al grupo de Poincaré, y (3.15)-(3.16) que están cargadas frente al grupo de simetría interna. Como veremos mas adelante, en presencia de cargas centrales $Z^{AB} \neq 0$ ($N > 1$), las ec.(3.9)-(3.11) son las responsables de que pueden aparecer estados BPS en una teoría supersimétrica.

Es útil expresar los anticonmutadores del álgebra supersimétrica (3.9)-(3.11) mediante espinores de Majorana Q_a ($a = 1, \dots, 4$). Siguiendo las convenciones del apéndice se obtiene

$$\{Q_a^A, Q_b^B\} = 2(\Gamma^\mu C)_{ab} P_\mu \delta^{AB} + 2C_{ab} U^{AB} + 2i(\Gamma^5 C)_{ab} V^{AB} \quad (3.19)$$

que también se suele expresar, dado que Q^A es Majorana, como

$$\{Q^A, \bar{Q}^B\} = -2 \left(\Gamma^\mu P_\mu \delta^{AB} + U^{AB} + i\Gamma^5 V^{AB} \right) \quad (3.20)$$

En la próxima sección discutiremos las distintas representaciones irreducibles del álgebra super-Poincaré (3.3)-(3.16).

3.2 Representaciones de la supersimetría

Dado que las supercargas Q conmutan con el operador 4-impulso P_μ , P^2 es un casimir para el álgebra super-Poincaré. Luego, todos los estados en una representación dada tienen la misma masa. El nuevo casimir que reemplaza al cuadrado del vector de Pauli-Ljubanski es C^2 , donde [11]⁵

$$C^2 = C_{\mu\nu} C^{\mu\nu} \quad (3.22)$$

⁴ Recordemos que la generalización del teorema de Coleman-Mandula permitía grupos semi-simples y factores $U(1)$ adicionales.

⁵La convención para el vector de Pauli-Ljubanski es

$$W_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma} \quad (3.21)$$

$$C_{\mu\nu} = B_\mu P_\nu - B_\nu P_\mu \quad (3.23)$$

$$B_\mu = W_\mu - \frac{1}{4} \bar{Q} \bar{\sigma}_\mu Q \quad (3.24)$$

Para que una teoría sea supersimétrica, el contenido de partículas de la misma debe formar una representación del álgebra escrita en la sección anterior. Como es conocido las representaciones del grupo de Poincaré se encuentran mediante el método de representaciones inducidas de Wigner[52]. El método consiste en encontrar representaciones de un subgrupo del grupo de Poincaré y luego boostearlas para encontrar la representación de todo el grupo. El procedimiento es elegir un valor para el momento p^μ que satisfaga $p^2 = 0$ o $p^2 = m^2$, según el caso a considerar, y luego, hallado el subgrupo H que deja invariante el p^μ elegido representarlo sobre los estados $|p^\mu\rangle$. En lo que sigue discutiremos las representaciones del álgebra (3.9)-(3.11), en el sistema de reposo de la partícula. La imagen física es simple: las propiedades de una partícula están determinadas por su comportamiento en un dado sistema de referencia. Embebiendo el álgebra supersimétrica en el álgebra super-Poincaré, encontramos las representaciones de esta última mediante el formalismo de Wigner. Como veremos al estudiar las posibles representaciones del álgebra supersimétrica, la supersimetría relaciona bosones con fermiones y viceversa

3.2.1 Ausencia de cargas centrales

En ausencia de cargas centrales, el álgebra para las supercargas Q, \bar{Q} es

$$\{Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu \delta_B^A \quad (3.25)$$

$$\{Q_\alpha^A, Q_\beta^B\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}A}, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} = 0 \quad (3.26)$$

Representaciones irreducibles no masivas: En el caso no masivo elegimos el sistema de referencia, donde $p^\mu = m(1, 0, 0, 1)$, el álgebra supersimétrica queda

$$\{Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4m \end{pmatrix} \delta_B^A \quad (3.27)$$

Cuyo autovalor es $w^2 = -m^2 s(s+1)$, $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$, para representaciones masivas, y en el caso no masivo, con $w^2 = 0$, queda $W_\mu = \lambda P_\mu$, donde λ es la helicidad.

Esta relación nos dice, dado que $\bar{Q}_A = (Q^A)^\dagger$, que en una teoría unitaria, todo estado físico $|fis\rangle$ satisface

$$Q_1|fis\rangle = \bar{Q}_1|fis\rangle = 0 \quad \implies \quad Q_1 = \bar{Q}_1 = 0 \quad \text{sobre estados físicos} \quad (3.28)$$

Solo la mitad de los generadores Q están activos⁶. Reescaleando los generadores no nulos

$$a^A = \frac{1}{2\sqrt{m}}Q_2^A, \quad (a^A)^\dagger = \frac{1}{2\sqrt{m}}\bar{Q}_{2A}, \quad (3.29)$$

el álgebra supersimétrica toma la forma

$$\{a^A, (a^B)^\dagger\} = \delta^{AB}, \quad \{a^A, a^B\} = 0, \quad \{(a^A)^\dagger, (a^B)^\dagger\} = 0. \quad (3.30)$$

Recordando que $A, B = 1, \dots, N$ reconocemos (3.30) como un álgebra de N osciladores fermiónicos, que tiene una representación 2^N -dimensional. La dimensión de las representaciones irreducibles no masivas es entonces $\dim(rep)|_{m=0} = 2^N$.

Analicemos el efecto de los Q 's sobre la helicidad de un estado. Calculando el conmutador del vector de Pauli–Ljubanski con las supercargas se obtiene

$$[W_\mu, \bar{Q}_A^\alpha] = -iP^\nu(\bar{\sigma}_{\mu\nu})^\alpha_{\dot{\beta}}\bar{Q}_A^{\dot{\beta}} \quad (3.31)$$

donde hemos usado la identidad (A.74). Aplicando este último operador a un estado no masivo con helicidad λ e impulso p , en el sistema que elegimos, vemos que

$$W_0 \bar{Q}_A^i |p, \lambda\rangle = p^0(\lambda - \frac{1}{2})\bar{Q}_A^i |p, \lambda\rangle \quad (3.32)$$

o en forma equivalente

$$W_0 \bar{Q}_{2A} |p, \lambda\rangle = p^0(\lambda - \frac{1}{2})\bar{Q}_{2A} |p, \lambda\rangle \quad (3.33)$$

de manera que la acción de los operadores \bar{Q}_{2A} sobre estados con helicidad definida es disminuir λ a $\lambda - \frac{1}{2}$.

La construcción del supermultiplete es simplemente representar el álgebra fermiónica (3.30). Definimos el vacío $|\Omega_\lambda\rangle$ como el estado anulado por todos los operadores de destrucción $a^A|\Omega_\lambda\rangle = 0$ y con helicidad definida λ ⁷. Los estados del multiplete los generamos por

⁶Dado que la mitad de las cargas supersimétricas dejan invariantes a los estados físicos, es lícito decir que las representaciones no masivas son representaciones $\frac{1}{2}$ -BPS.

⁷El vacío en el caso no masivo es no degenerado.

acción de los operadores de creación $(a^A)^\dagger$ actuando sobre el vacío

$$(a^{A_1})^\dagger \dots (a^{A_k})^\dagger |\Omega_\lambda\rangle, \quad A_i = 1, \dots, N \quad (3.34)$$

Debido a antisimetría el estado con k $(a^A)^\dagger$'s tendrá degeneración \mathbf{C}_k^N y helicidad $\lambda - k/2$.

El multiplete contará con estados desde λ a $\lambda - N/2$. Esquemáticamente

$$\begin{aligned} \underline{N=1} : & \quad |\lambda\rangle, \quad |\lambda - 1/2\rangle \\ \underline{N=2} : & \quad |\lambda\rangle, \quad 2|\lambda - 1/2\rangle, \quad |\lambda - 1\rangle \\ \underline{N=4} : & \quad |\lambda\rangle, \quad 4|\lambda - 1/2\rangle, \quad 6|\lambda - 1\rangle, \quad 4|\lambda - 3/2\rangle, \quad |\lambda - 2\rangle \end{aligned} \quad (3.35)$$

Las representaciones no son necesariamente invariantes CPT. Multipletes invariantes CPT se obtienen cuando $\lambda = N/4$. En el caso particular $N = 1$, al pedir invarianza CPT debemos considerar la unión de dos representaciones irreducibles no masivas, obteniéndose cuatro estados $\lambda, \lambda - \frac{1}{2}, -\lambda + \frac{1}{2}$ y $-\lambda$.

Si pretendemos realizar la supersimetría en una teoría de campos, los estados de partícula necesariamente vendrán acompañadas por su conjugado CPT. Escribamos las posibles representaciones CPT invariantes y su interpretación en términos de campos

$$\begin{aligned} \underline{N=1} \quad (|\Omega_{-\frac{1}{2}}\rangle) : & \quad \{ | - 1/2 \rangle, | - 1 \rangle \} & \oplus CPT : & \quad \{ | 1/2 \rangle, | 1 \rangle \} \\ (|\Omega_0\rangle) : & \quad \{ | 0 \rangle, | - 1/2 \rangle \} & \oplus CPT : & \quad \{ | 0 \rangle, | 1/2 \rangle \} \\ (|\Omega_{\frac{1}{2}}\rangle) : & \quad \{ | 1/2 \rangle, | 0 \rangle \} & \oplus CPT : & \quad \{ | - 1/2 \rangle, | 0 \rangle \} \\ (|\Omega_1\rangle) : & \quad \{ | 1 \rangle, | 1/2 \rangle \} & \oplus CPT : & \quad \{ | - 1 \rangle, | - 1/2 \rangle \} \\ \underline{N=2} \quad (|\Omega_0\rangle) : & \quad \{ | 0 \rangle, 2| - 1/2 \rangle, | - 1 \rangle \} & \oplus CPT : & \quad \{ | 0 \rangle, 2| 1/2 \rangle, | 1 \rangle \} \\ (|\Omega_{\frac{1}{2}}\rangle) : & \quad \{ | 1/2 \rangle, 2| 0 \rangle, | - 1/2 \rangle \} & & \quad (\text{autoconjugada CPT}) \\ (|\Omega_1\rangle) : & \quad \{ | 1 \rangle, 2| 1/2 \rangle, | 0 \rangle \} & \oplus CPT : & \quad \{ | - 1 \rangle, 2| - 1/2 \rangle, | 0 \rangle \} \\ \underline{N=4} \quad (|\Omega_1\rangle) : & \quad \{ | 1 \rangle, 4| 1/2 \rangle, 6| 0 \rangle, 4| - 1/2 \rangle, | - 1 \rangle \} & & \quad (\text{autoconjugada CPT}) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Para $N = 1$ la representación contiene un campo escalar complejo y un espinor de Majorana (multiplete quiral $N = 1$ $\Phi = (\phi, \psi)$) cuando partimos de un vacío $|\Omega_\lambda\rangle$ con helicidad $\lambda = 0, 1/2$ y sumamos la representación conjugada CPT. De hecho, la representación correspondiente al multiplete quiral, es la unión de las representaciones obtenidas a partir de $|\Omega_0\rangle$ y $|\Omega_{1/2}\rangle$. La representación correspondiente al multiplete vectorial $N = 1$ ($V = (A_\mu, \lambda)$) contiene un campo vectorial no masivo y un espinor de Majorana. Esta representación se obtiene partiendo de un vacío con helicidad $\lambda = 1, -1/2$ y sumando la correspondiente conjugada CPT. La representación se obtiene uniendo los multipletes correspondientes a $|\Omega_1\rangle$ y $|\Omega_{-1/2}\rangle$.

Para $N = 2$ y $\lambda = 1/2$ tenemos una representación autoconjugada CPT que contiene un espinor de Majorana y un escalar complejo. El hipermultiplete $N = 2$ corresponde a esta representación pero duplicada. La representación tiene el mismo contenido de campos que dos multipletes quirales $N = 1$. Para $N = 2$ y $\lambda = -1$, tenemos un campo vectorial no masivo, dos espinores de Majorana y un escalar complejo (multiplete vectorial $N = 2$). Este último multiplete $N = 2$ es equivalente en contenido de campos a la suma de un multiplete vectorial y un multiplete quiral $N = 1$. La representación $N = 4$ es autoconjugada CPT y acomoda un campo vectorial no masivo, dos fermiones de Dirac y tres escalares complejos (multiplete vectorial $N = 4$). Nos detuvimos en $N = 4$ ya que un número mayor de supersimetrías necesariamente involucra partículas con helicidad $\lambda > 1$.

De acuerdo con el método de representaciones inducidas de Wigner, la representación del super-grupo de Poincaré se obtiene boosteando los estados descriptos más arriba.

Representaciones irreducibles masivas: Para estados masivos siempre podemos ir al sistema de reposo de la partícula, donde $p^\mu = m(1, 0, 0, 0)$. Definiendo

$$a_\alpha^A = Q_\alpha^A / \sqrt{2m}, \quad (a_\alpha^A)^\dagger = \bar{Q}_{\dot{\alpha}A} / \sqrt{2m} \quad (3.37)$$

El álgebra supersimétrica se reduce a

$$\{a_1^A, (a_1^B)^\dagger\} = \delta^{AB}, \quad \{a_2^A, (a_2^B)^\dagger\} = \delta^{AB} \quad (3.38)$$

donde el resto de los conmutadores son nulos. Nuevamente nos encontramos ante un álgebra de Clifford ahora, con $4N$ operadores, el doble que en el caso no masivo. Analizando el operador C definido en (3.24) vemos que en el sistema en reposo podemos escribir

$$C^2 = 2m^4 J_i J^i \quad (3.39)$$

$$J_i \equiv S_i - \frac{1}{4m} \bar{Q} \bar{\sigma}_i Q \quad (3.40)$$

donde S_i es el operador de espín $S_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M^{jk}$ ($i = 1, 2, 3$). Dado que S_i y $\bar{\sigma}_i$ obedecen el álgebra de $SU(2)$, tenemos

$$[J_i, J_j] = i \varepsilon_{ijk} J_k \quad (3.41)$$

luego, J^2 tiene autovalores $j(j+1)$, con j entero o semientero. Definimos el vacío como en la sección anterior y construimos los posibles estados por aplicación de los operadores $(a^A)^\dagger$

actuando sobre el mismo (ver ec.(3.34)). Sin embargo, en el caso masivo el vacío puede estar degenerado. Debido a que J_i actuando sobre el vacío se reduce al operador de espín, $|\Omega_s\rangle$ es un autoestado del operador de espín

$$|\Omega_s\rangle = |m, s, s_3\rangle \quad (3.42)$$

A nivel k tenemos una degeneración \mathbf{C}_k^{2N} quedando la dimensión de la representación masiva $\dim(rep)|_{m \neq 0} = 2^{2N}(2j+1)^8$; la mitad de los estados son fermiónicos y la otra mitad bosónicos. El máximo espín que podemos alcanzar desde el vacío $|\Omega_s\rangle$ es $s + N/2$, en discrepancia con el cálculo naive $s + (2N)/2 = s + N$, esto se debe a que ahora tenemos las dos componentes de las cargas supersimétricas $Q_{1,2}^A$, luego, términos del tipo $(a_1^A)^\dagger (a_2^A)^\dagger = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}(a_\alpha^A)^\dagger (a_\beta^A)^\dagger$ son escalares y no disminuyen el espín. El estado que obtenemos aplicando $k = 2N$ operadores de creación $(a^A)^\dagger$ tiene el mismo espín que el vacío. En el caso $N = 1$ partiendo de un vacío $|\Omega_0\rangle$, tenemos el siguientes multiplete

$$\underline{N=1} (|\Omega_0\rangle) : \quad |\Omega_0\rangle, \quad a_\alpha^\dagger |\Omega_0\rangle, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^{\alpha\beta} a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger |\Omega_0\rangle \quad (3.43)$$

El número de estados es $2^2 = 4$. Tenemos $(0) \oplus (1/2) \oplus (0)$ ⁹. Que corresponden a dos campos escalares reales y un espinor de Weyl (ϕ, λ) . Dado que la operación de paridad intercambia $(a_1)^\dagger$ con $(a_2)^\dagger$, el último estado en (3.43) corresponde a un campo pseudoescalar.

Partiendo de un vacío $|\Omega_j\rangle$ de espín j y degeneración $2j+1$, la representación contiene $(2j+1)2^{2N}$ estados. El espectro se construye combinando la representación $j=0$ del álgebra con un espín j , usando las reglas de adición de momento angular. El resultado es

$$\underline{N=1} (|\Omega_j\rangle) : \quad (j) \oplus (j+1/2) \oplus (j-1/2) \oplus (j) \quad (3.44)$$

Para $j = 1/2$ obtenemos un campo de gauge, un fermión de Dirac (dos fermiones de Weyl) y un campo escalar real (φ, ψ, A_μ) , conteniendo el multiplete $4 + 4 = 8$ estados on-shell. Para el contenido de campos en el caso N, j arbitrario ver [6].

⁸El factor $(2j+1)$ proviene, en el caso masivo, de la degeneración del vacío.

⁹Con (j) denotamos un estado con espín total j y degeneración $2j+1$.

3.2.2 Cargas centrales no nulas

En presencia de cargas centrales el álgebra toma la forma

$$\{Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu \delta_B^A \quad (3.45)$$

$$\{Q_\alpha^A, Q_\beta^B\} = 2\epsilon_{\alpha\beta} Z^{AB} \quad (3.46)$$

$$\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}A}, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} = -2\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} Z_{AB}^* \quad (3.47)$$

donde Z y Z^* son las matrices de carga central, antisimétricas en A, B , y tomamos por convención $Z^{AB} = -Z_{AB}$. En presencia de las extensiones centrales, no es posible interpretar a \bar{Q} y Q como operadores de creación y destrucción sin rediagonalizar la base. Nos limitaremos al caso de N par. Mediante una transformación unitaria actuando sobre los índices internos de las supercargas $Q_\alpha^A \rightarrow \tilde{Q}_\alpha^A = U_B^A Q_\alpha^B$ (o $Q_\alpha \rightarrow \tilde{Q}_\alpha = U Q_\alpha$) con $U^\dagger = U$, podemos llevar a $Z \rightarrow \tilde{Z} = U Z U^T$ a una forma antisimétrica en bloques sobre la diagonal $\tilde{Z} = \epsilon \otimes D$ (descomposición de Zumino)

$$\tilde{Z} = \begin{pmatrix} (Z_1 \epsilon^{ab}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (Z_2 \epsilon^{ab}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (Z_{\frac{N}{2}} \epsilon^{ab}) \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

donde $\epsilon^{ab} = -\epsilon_{ab} = i\sigma^2$. En esta descomposición los “autovalores” $Z_1, Z_2, \dots, Z_{N/2}$ son reales y no negativos. De manera que los índices A, B que cuentan el número de supersimetrías pueden ser descompuestos en $(a, L), (b, M)$, con $a, b = 1, 2$ que provienen del tensor ϵ , y $L, M = 1, \dots, N/2$ provenientes de la matriz D . Escribiendo ahora el álgebra (3.47) en el sistema en reposo (para estados masivos) y en la base de Zumino, vemos que solo es necesario considerar un álgebra $N = 2$,

$$\{Q_\alpha^a, \bar{Q}_{\dot{\beta}b}\} = 2m\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^0 \delta_b^a \quad (3.49)$$

$$\{Q_\alpha^a, Q_\beta^b\} = 2\epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{ab} Z \quad (3.50)$$

$$\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}a}, \bar{Q}_{\dot{\beta}b}\} = -2\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon_{ab} Z \quad (3.51)$$

Si definimos las siguientes supercargas

$$a_\alpha = \frac{1}{2} [Q_\alpha^1 + \epsilon_{\alpha\beta} (Q_\beta^2)^\dagger] \quad (3.52)$$

$$b_\alpha = \frac{1}{2} [Q_\alpha^1 - \epsilon_{\alpha\beta} (Q_\beta^2)^\dagger] \quad (3.53)$$

el álgebra (3.49)-(3.51) se reduce a

$$\begin{aligned}\{a_\alpha, (a_\beta)^\dagger\} &= (m + Z)\delta_{\alpha\beta} \\ \{b_\alpha, (b_\beta)^\dagger\} &= (m - Z)\delta_{\alpha\beta}\end{aligned}\tag{3.54}$$

donde el resto de los conmutadores son cero. La representación la construimos definiendo el vacío $|\Omega\rangle$ como el estado aniquilado por los operadores de destrucción a_α, b_α y actuando con los operadores de creación $(a_\alpha)^\dagger, (b_\alpha)^\dagger$ sobre el mismo. Habiendo diagonalizado el álgebra $N = 2$, el álgebra en el caso de tener N supersimetrías consiste simplemente en agregar un índice $L = 1, \dots, N/2$ a los operadores a, b y a las cargas centrales

$$\{a_\alpha^L, (a_\beta^M)^\dagger\} = (m + Z_L)\delta_{\alpha\beta}\delta_M^L\tag{3.55}$$

$$\{b_\alpha^L, (b_\beta^M)^\dagger\} = (m - Z_L)\delta_{\alpha\beta}\delta_M^L\tag{3.56}$$

De estas expresiones se deduce una desigualdad conocida como “cota de Bogomol’nyi”. Tomando el valor de expectación de (3.56) para un estado físico arbitrario tenemos para $L = M$ y $\alpha = \beta$

$$|(a^L)^\dagger|fis\rangle|^2 + |(a^L)|fis\rangle|^2 = (m + Z_L) \implies (m + Z_L) \geq 0\tag{3.57}$$

$$|(b^L)^\dagger|fis\rangle|^2 + |(b^L)|fis\rangle|^2 = (m - Z_L) \implies (m - Z_L) \geq 0\tag{3.58}$$

de donde se sigue la “cota de Bogomol’nyi”

$$m \geq Z_L \quad \forall Z_L\tag{3.59}$$

Esta ecuación demuestra que:

- En el caso no masivo no es posible (dado que las $Z_L \geq 0$) la presencia de cargas centrales.
- En el caso masivo la masa de las representaciones está acotada inferiormente por la máxima carga central.

En la proxima sección discutiremos un efecto interesante conocido como acortamiento del supermultiplete, que sucede cuando la masa de la representación satisface $m = Z_L$ para alguna Z_L .

3.3 Estados saturados o Estados BPS

Hasta aquí hemos discutido las distintas representaciones irreducibles del álgebra supersimétrica y dedujimos que para álgebras con supersimetría extendida $N > 1$, en presencia de cargas centrales, la masa de las representaciones está acotada inferiormente por el valor de la máxima carga central.

El caso en que ninguna carga central Z_L iguala a la masa de la representación, es análogo al caso masivo sin cargas centrales discutido anteriormente. Tenemos $2N$ operadores de creación (ver ec.(3.56)) y la dimensión de la representación es $2^{2N}(2j+1)$.

Nos interesa discutir ahora el caso en que alguna de las cargas centrales Z_L , coincide con la masa de la representación. En este caso vemos de la ec.(3.56), que los osciladores b^L y $(b^L)^\dagger$ proyectan sobre estados nulos, y nos encontramos ante una situación similar al caso no masivo (ver ec.(3.28)). A este tipo de representaciones se las denomina representaciones cortas del álgebra supersimétrica. En el caso particular en que todas las cargas centrales coincidan con la masa de la representación, tenemos que todos los osciladores b^L son nulos, reduciéndose entonces a la mitad el número de operadores de creación (representaciones $\frac{1}{2}$ -BPS). En este caso la dimensión de la representación masiva pasa de $2^{2N}(2j+1)$ a $2^N(2j+1)$ estados. En particular para $j=0$, la dimensión de la representación masiva $\frac{1}{2}$ -BPS, coincide con la de la representación no masiva. Este fenómeno es importante, ya que nos permite afirmar que el fenómeno de Higgs en teorías de gauge supersimétricas, es posible. Partiendo de un lagrangiano supersimétrico para campos no masivos, es posible obtener un espectro masivo, conservando el número de grados de libertad, si el mismo es BPS.¹⁰

¹⁰ Los estados BPS, o estados saturados, son importantes en el testeo de las conjeturas de dualidad entre distintas teorías supersimétricas [53]-[54] y en el análisis de fenómenos no perturbativos[13]. Algunas de las razones son:

- Debido a su relación con las cargas centrales, a pesar de ser masivos, forman multipletes de supersimetría mas cortos que los multipletes masivos generales. Su masa está dada en términos de su carga y de los valores de expectación de los campos de Higgs (módulos).
- Son los únicos estados que pueden hacerse no masivos al variar las constantes de acoplamiento y los valores de expectación de los Higgs.
- Cuando están en reposo no hay fuerza neta entre ellos.
- Se supone que la fórmula de masa es exacta si se escribe en términos de los valores renormalizados de las cargas y los módulos.
- En puntos genéricos del espacio de módulos son estables.

Como veremos en el cap. 4 la cota de Bogomol'nyi ec.(3.59) está relacionada con la cota algebraica derivada por Bogomol'nyi [17] en modelos puramente bosónicos mediante métodos algebraicos, de allí su nombre. De hecho, en la extensión supersimétrica de dichos modelos (basada en un álgebra sin cargas centrales) la presencia de soluciones solitónicas da origen a extensiones centrales en el álgebra supersimétrica realizando (3.47) [21]. Las cargas centrales tienen su origen en términos de superficie (topológicos) que aparecen al calcular los anticonmutadores de las cargas supersimétricas Q y \bar{Q} . Dado que estas se expresan, via el teorema de Noether, por integrales de expresiones locales de los campos del modelo, dichos términos de superficie, que usualmente se descartan, deben ser tenidos en cuenta en presencia de solitones. El resultado es que las cargas centrales, para una normalización adecuada, son iguales a las cargas topológicas.

Otro aspecto del análisis de Bogomol'nyi es que las soluciones que saturaran la cota satisfacen ecuaciones de primer orden llamadas ecuaciones BPS, en lugar de las ecuaciones de segundo orden de Euler-Lagrange. Estas ecuaciones surgen, en la perspectiva supersimétrica, de observar que para un estado BPS existen cargas que lo dejan invariante (las correspondientes a los osciladores b en la ec.(3.56)). Pidiendo invarianza del estado frente a las transformaciones supersimétricas generadas por dichas cargas obtenemos las ecuaciones Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield.

3.4 Formalismo de supercampos $N = 1$

El álgebra supersimétrica (3.19) puede ser interpretada como un álgebra de Lie con parámetros anticonmutantes. Dado que el grupo de Poincaré actúa de manera natural sobre las coordenadas del espacio-tiempo, las transformaciones supersimétricas actúan de manera natural sobre una extensión del espacio-tiempo llamada *superespacio*. Al realizar el superálgebra sobre el superespacio obtenemos los *supercampos*. Los campos cuánticos usuales corresponden a las distintas componentes de un *supercampo*, al ser expandido en las coordenadas

El análisis del álgebra supersimétrica en distintos modelos de teorías de campos muestra que, en ciertos casos, los solitones de la teoría corresponden a estados BPS. Dado que estos estados solitónicos son los relevantes en la descripción no perturbativa, es posible hacer predicciones sobre el régimen de acoplamiento fuerte, basados en las propiedades BPS de los mismos.

anticonmutantes del superespacio.

3.4.1 Superespacio

Discutiremos el caso de superespacio $N = 1$. Con el fin de interpretar el superálgebra de Poincare como un álgebra de Lie, el superespacio se introduce agregando cuatro grados de libertad fermiónicos $\theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$, a los bosónicos x^μ ya existentes. La propiedad fermiónica se manifiesta en que estas coordenadas anticonmutan¹¹

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = \{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = \{\theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (3.60)$$

Con estas propiedades para las variables θ se deduce que

$$[\theta Q, \bar{\theta} \bar{Q}] = 2\theta^\mu \bar{\theta} P_\mu \quad (3.61)$$

$$[\theta Q, \theta Q] = 0 \quad (3.62)$$

$$[\bar{\theta} \bar{Q}, \bar{\theta} \bar{Q}] = 0 \quad (3.63)$$

Esta definición motiva la definición del elemento del grupo de super-Poincare como

$$G(x, \theta, \bar{\theta}, \omega) = e^{i[-x^\mu P_\mu + \theta Q + \bar{\theta} \bar{Q}]} e^{-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}} \quad (3.64)$$

Es claro entonces que $(x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$ parametrizan el espacio cociente 4+4-dimensional: super-Poincaré $N = 1$ módulo Lorentz. Este espacio cociente es conocido como *superespacio rígido* $N = 1$ ¹².

A partir del elemento del grupo ec.(3.64), es posible deducir la acción del grupo sobre las coordenadas del superespacio. Usando la fórmula de Hausdorff

$$e^A e^B = e^{A+B+1/2[A,B]+\dots} \quad (3.65)$$

obtenemos¹³

$$G(a, \xi, \bar{\xi}) G(x, \theta, \bar{\theta}) = G(x + a + i\theta\sigma\bar{\xi} - i\xi\sigma\bar{\theta}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}) \quad (3.66)$$

¹¹Los índices $\alpha, \dot{\alpha}$ se suben y bajan siguiendo las convenciones del apéndice.

¹² Rígido se refiere a supersimetría global.

¹³Los términos de orden mayor se anulan en el presente caso, debido a (3.63).

Frente a una transformación supersimétrica con parámetros ξ y $\bar{\xi}$, las coordenadas del superespacio transforman como

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\xi} - i\xi\sigma^\mu\bar{\theta} \quad (3.67)$$

$$\theta \rightarrow \theta' = \theta + \xi \quad (3.68)$$

$$\bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta}' = \bar{\theta} + \bar{\xi} \quad (3.69)$$

Dado que estas transformaciones son implementadas por el operador $i(\xi^\alpha Q_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}})$, es facil obtener una representación en términos de operadores diferenciales actuando en el superespacio

$$P_\mu = i\partial_\mu \quad (3.70)$$

$$iQ_\alpha = \partial_\alpha - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu, \quad iQ^\alpha = -\partial^\alpha + i\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \partial_\mu \quad (3.71)$$

$$i\bar{Q}^{\dot{\alpha}} = \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} - i\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \theta_\alpha \partial_\mu, \quad i\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \quad (3.72)$$

Las cuales satisfacen el álgebra (3.26) con $N = 1$ a menos de un signo [6],[7]. Es util definir derivadas covariantes frente a las transformaciones supersimétricas¹⁴

$$D_\alpha = \partial_\alpha + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu, \quad D^\alpha = -\partial^\alpha - i\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \partial_\mu \quad (3.73)$$

$$\bar{D}^{\dot{\alpha}} = \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} + i\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \theta_\alpha \partial_\mu, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \quad (3.74)$$

Estas derivadas anticonmutan con todos los generadores Q, \bar{Q} .

3.4.2 Supercampos

Un supercampo es simplemente una función de las coordenadas del superespacio $(x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$. Como las variables θ son Grassmann, el desarrollo de Taylor tiene un número finito de términos. Los campos usuales aparecen como las componentes del supercampo al expandirlo en θ . Un supercampo escalar arbitrario toma la forma

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = & f(x) + \theta\varphi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta^2 m(x) + \bar{\theta}^2 n(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta} A_\mu(x) \\ & + \theta^2 \bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}^2 \theta\psi(x) + \theta^2 \bar{\theta}^2 d(x) \end{aligned} \quad (3.75)$$

¹⁴Usando la regla de la cadena es facil ver que $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ es invariante frente a (3.69), pero que $\partial_\alpha = \partial/\partial\theta^\alpha$ y $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} = \partial/\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ no lo son.

Bajo una transformación supersimétrica infinitesimal, el supercampo transforma como

$$\delta\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = i[\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}]\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (3.76)$$

Dado que conocemos la acción de las supercargas Q como operadores diferenciales en el superespacio (3.72) podemos, desarrollando (3.76) encontrar las transformaciones supersimétricas de los campos usuales. Se obtiene

$$\delta_\xi f = \xi\varphi + \bar{\xi}\bar{\chi} \quad (3.77)$$

$$\delta_\xi\varphi_\alpha = 2m\xi_\alpha - (\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu)_\alpha[A_\mu + i\partial_\mu f] \quad (3.78)$$

$$\delta_\xi\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = 2n\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} + (\xi\sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}[A_\mu - i\partial_\mu f] \quad (3.79)$$

$$\delta_\xi m = \bar{\xi}\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\bar{\xi}\bar{\theta}\varphi \quad (3.80)$$

$$\delta_\xi n = \xi\psi + \frac{i}{2}\xi\theta\bar{\chi} \quad (3.81)$$

$$\delta_\xi A_\mu = \xi\sigma_\mu\bar{\lambda} + \psi\sigma_\mu\bar{\xi} + i(\xi\partial_\mu\varphi - \bar{\xi}\partial_\mu\bar{\chi}) - \frac{i}{2}(\xi\sigma_\mu\bar{\theta}\varphi - \bar{\xi}\bar{\sigma}_\mu\theta\bar{\chi}) \quad (3.82)$$

$$\delta_\xi\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} = 2d\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} + \frac{i}{2}(\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu)^{\dot{\alpha}}\partial_\mu A_\nu - i(\xi\sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}\partial_\mu m \quad (3.83)$$

$$\delta_\xi\psi_\alpha = 2d\xi_\alpha - \frac{i}{2}(\xi\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_\alpha\partial_\mu A_\nu - i(\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu)_\alpha\partial_\mu n \quad (3.84)$$

$$\delta_\xi d = \frac{i}{2}\partial_\mu[\xi\sigma^\mu\bar{\lambda} + \bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\psi] \quad (3.85)$$

donde hemos denotado $\partial = \sigma^\mu\partial_\mu$ y $\bar{\partial} = \bar{\sigma}^\mu\partial_\mu$. La utilidad del formalismo de supercampos se descubre al observar que la componente mas alta del supercampo escalar Φ , el campo d , transforma como una derivada total frente a transformaciones supersimétricas¹⁵. Luego, ignorando términos de superficie, la integral en el espacio-tiempo de la componente mas alta de un supercampo escalar es invariante frente a supersimetría. Los lagrangianos supersimétricos pueden entonces construirse tomando la componente mas alta del supercampo apropiado. La forma elegante en que se denota la componente “invariante” frente a supersimetría dentro del formalismo es mediante una integral en todo el superespacio (ver apéndice B).

¹⁵Las dimensiones de las variables anticonmutantes, medidas en unidades de energía, se deducen de observar que

$$\{Q, Q\} \sim P \implies [Q] = \frac{1}{2} \implies [\theta] = -\frac{1}{2} \quad (3.86)$$

Hemos demostrado que los supercampos escalares forman una representación lineal (off-shell) del álgebra supersimétrica $N = 1$. Sin embargo esta representación es reducible. La forma en que se obtienen las distintas representaciones irreducibles es imponiendo vínculos al supercampo. Señalemos sin embargo, que el supercampo escalar genérico no es completamente reducible, esto significa que la representación reducible Φ *no es* una suma de representaciones irreducibles.

3.4.3 Representaciones irreducibles

Supercampo quiral: El supercampo quiral está caracterizado por la condición¹⁶

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \quad (3.88)$$

El vínculo anterior se resuelve facilmente haciendo un cambio de variables en el superespacio de $(x, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow (y, \theta, \bar{\theta})$ donde

$$y^{\mu} = x^{\mu} + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta} \quad (3.89)$$

El cambio de variables está motivado porque

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}y^{\mu} = 0 \quad (3.90)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta^{\beta} = 0 \quad (3.91)$$

Luego, toda función de (y, θ) es un supercampo quiral¹⁷. La solución para el vínculo es

$$\Phi(y, \theta) = \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta^2 F(y) \quad (3.94)$$

donde $\phi(y)$ y $F(y)$ son campos escalares complejos, mientras que $\psi(y)$ es un espinor de Weyl $(\frac{1}{2}, 0)$. Tenemos $4 + 4 = 8$ componentes de campo reales off-shell, estas son el doble que

¹⁶Debido a que $\{Q, D\} = \{Q, \bar{D}\} = \{\bar{Q}, D\} = \{\bar{Q}, \bar{D}\} = 0$ tenemos que, frente a una transformación supersimétrica, $D\Phi$ transforma covariantemente

$$\Phi \rightarrow G\Phi \implies D(G\Phi) = GD\Phi \quad (3.87)$$

donde G está dada por (3.64). Luego, la condición de quiralidad es invariante.

¹⁷El cambio de variables transforma las derivadas covariantes (3.74) en

$$D_{\alpha} = \partial_{\alpha} + 2i(\sigma^{\mu}\bar{\theta})_{\alpha}\partial_{\mu} \quad (3.92)$$

$$\bar{D}^{\dot{\alpha}} = \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} \quad (3.93)$$

donde aquí $\partial_{\mu} = \partial/\partial y^{\mu}$.

las que aparecen en las representaciones irreducibles on-shell. La expansión total en θ 's de (3.94) es¹⁸

$$\Phi(y, \theta) = \phi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \theta^2 F(x) \quad (3.101)$$

$$+ i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar{\theta} - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\phi(x) \quad (3.102)$$

Las transformaciones supersimétricas infinitesimales para los campos son

$$\delta\phi = \sqrt{2}\xi\psi \quad (3.103)$$

$$\delta\psi = \sqrt{2}\xi F + \sqrt{2}i\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu\phi \quad (3.104)$$

$$\delta F = i\sqrt{2}\partial_\mu(\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\psi) \quad (3.105)$$

En notación de espinores de cuatro componentes, agrupando $(\xi_\alpha, \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}) \rightarrow \Xi$ y $(\psi_\alpha, \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}) \rightarrow \Psi$ (ver apéndice A), toman la forma

$$\delta\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Xi}(1 + \Gamma^5)\Psi \quad (3.106)$$

$$\delta\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(1 + \Gamma^5)(F + i\Gamma^\mu\partial_\mu\phi) + (1 - \Gamma^5)(F^* + i\Gamma^\mu\partial_\mu\phi^*)\right]\Xi \quad (3.107)$$

$$\delta F = \frac{i}{\sqrt{2}}\partial_\mu\left(\bar{\Xi}(1 - \Gamma^5)\Gamma^\mu\Psi\right) \quad (3.108)$$

Notemos que la variación de F es una derivada total¹⁹. Tenemos entonces que el supercampo quiral define una representación lineal off-shell de supersimetría $N = 1$. La expresión on-shell de las transformaciones se obtiene al reemplazar el campo auxiliar F por su ecuación de movimiento (que resulta ser una ecuación algebraica). En general las transformaciones on-shell serán no lineales.

¹⁸El supercampo quiral corresponde al supercampo escalar general con el siguiente vínculo

$$\bar{\chi}(x) = 0 \quad (3.95)$$

$$n(x) = 0 \quad (3.96)$$

$$A_\mu(x) = i\partial_\mu f(x) \quad (3.97)$$

$$\bar{\lambda}(x) = -\frac{i}{2}\partial_\mu\phi\sigma^\mu \quad (3.98)$$

$$\psi(x) = 0 \quad (3.99)$$

$$d(x) = -\frac{1}{4}\Box f(x) \quad (3.100)$$

es fácil verificar que las transformaciones supersimétricas $N = 1$ respetan este vínculo.

¹⁹La manera de obtener elegantemente la componente mas alta de un supercampo quiral es integrando en las variables quirales (ver apéndice B).

La representación del campo quirral $\Phi = (\phi, \psi)$ corresponde on-shell al multiplete supersimétrico que contiene un campo escalar complejo ϕ y un fermión de Weyl ψ (cf.(3.36)).

Los supercampos antiquirales se definen de la manera obvia. Si $\Phi(y, \theta)$ es un campo quirral, $\Phi^\dagger(y^\dagger, \bar{\theta})$ será un campo antiquiral, esto es, satisfará

$$D_\alpha \Phi^\dagger = 0 \quad (3.109)$$

$$\Phi^\dagger = \Phi^\dagger(y^\dagger, \bar{\theta}), \quad y^\dagger = x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta} \quad (3.110)$$

Dado que D_α y $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ obedecen la regla de Leibniz, todo producto de supercampos quirales (antiquirales) es un supercampo quirral (antiquiral).

Supercampo vectorial: Este multiplete se define como un supercampo real

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = V^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (3.111)$$

en componentes

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) = & c + \theta\psi + \bar{\theta}\bar{\psi} + \theta^2 m + \bar{\theta}^2 m^* - \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu \\ & + i\theta^2(\bar{\theta}\bar{\lambda} + \frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\psi}) - i\bar{\theta}^2(\theta\lambda - \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\psi}) + \theta^2\bar{\theta}^2(\frac{1}{2}D - \frac{1}{4}\square c) \end{aligned} \quad (3.112)$$

Tenemos entonces 4 escalares reales, 2 espinores de Weyl y un campo vectorial real. El número total de componentes es $8 + 8 = 16$ componentes reales y corresponde a una representación irreducible off-shell con el doble de grados de libertad que la representación on-shell masiva correspondiente a $\Omega_{\frac{1}{2}}$. La presencia del vector A_μ en el supermultiplete sugiere emplearlo para construir modelos supersimétricos invariantes de gauge. Debemos, entonces, definir la generalización de la invarianza de gauge en el caso supersimétrico.

Definimos las transformaciones de gauge supersimétricas (supergauge) del multiplete vectorial como

$$V \rightarrow V + \Lambda + \Lambda^\dagger \quad (3.113)$$

donde $\Lambda(\Lambda^\dagger)$ es un supercampo quirral (antiquiral). Desarrollando en componentes vemos que es posible elegir convenientemente Λ de manera de llevar al supercampo V al gauge de “Wess-Zumino” donde $c = \psi = m = 0$

$$V_{WZ} = -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu + i\theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda} - i\bar{\theta}^2\theta\lambda + \theta^2\bar{\theta}^2\frac{1}{2}D \quad (3.114)$$

La elección del gauge WZ fija todas las componentes del campo quiral $\Lambda = (\varphi, \chi, G)$ excepto la correspondiente a la parte imaginaria del campo φ . Es facil ver desarrollando (3.113) en componentes que fijado el gauge de WZ aún tenemos la libertad de realizar transformaciones de gauge abelianas sobre A_μ

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \varphi^I \quad (3.115)$$

con $\varphi^I = 2 \text{Im}(\varphi)$. De esta manera, el campo vectorial A_μ transforma frente a (3.113) de la manera esperada. El gauge de Wess-Zumino no es invariante frente a supersimetría²⁰, sin embargo aun habiéndolo fijado tenemos la libertad de realizar transformaciones de gauge abelianas sobre A_μ . Las transformaciones supersimétricas infinitesimales para los campos son

$$\delta_{WZ} A_\mu = -i(\xi \sigma_\mu \bar{\lambda} + \bar{\xi} \bar{\sigma}_\mu \lambda) \quad (3.116)$$

$$\delta_{WZ} \lambda_\alpha = i(D\xi_\alpha - F_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu} \xi)_\alpha) \quad (3.117)$$

$$\delta_{WZ} D = \partial_\mu(\bar{\xi} \bar{\sigma}_\mu \lambda - \xi \sigma_\mu \bar{\lambda}) \quad (3.118)$$

Que en notación de espinores de cuatro componentes toman la forma

$$\delta_{WZ} A_\mu = -i \bar{\Xi} \Gamma_\mu \Lambda \quad (3.119)$$

$$\delta_{WZ} \Lambda = i(D\Gamma^5 - F_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu}) \Xi \quad (3.120)$$

$$\delta_{WZ} D = \partial_\mu(\bar{\Xi} \Gamma_\mu \Gamma^5 \Lambda) \quad (3.121)$$

A partir de V definimos el supercampo de curvatura como²¹

$$W_\alpha = \frac{1}{8} \bar{D}^2 e^{-2V} D_\alpha e^{2V} \quad (3.122)$$

$$= i\lambda_\alpha - \theta_\alpha D + \frac{i}{2}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \theta)_\alpha F_{\mu\nu} - \theta^2 (\not{\partial} \bar{\lambda})_\alpha \quad (3.123)$$

²⁰La situación es análoga a lo que sucede en las teorías de gauge usuales, el fijado del gauge de Coulomb A_0 no es invariante de Lorentz, si queremos permanecer en el gauge de Coulomb luego de una transformación de Lorentz, debemos realizar una transformación de gauge adicional. En nuestro caso, si queremos permanecer en el gauge de WZ luego de una transformación supersimétrica debemos realizar una transformación de supergauge adicional. Por lo tanto en (3.118) denotamos por $\delta_{WZ} \equiv \delta^{(SUSY)} + \delta^{(SG)}$ donde $\delta^{(SG)}$ corresponde a la transformación de supergauge adicional que es necesario realizar sobre el supercampo $V' = V + \delta^{(SUSY)} V$ para llevarlo al gauge de WZ.

²¹Como veremos mas abajo, en el caso abeliano W_α es invariante de gauge por lo tanto puedo calcular (3.122) en el gauge de WZ, la particularidad de este gauge es que $V^3 = 0$. Luego, la exponencial tiene un número finito de términos.

$F_{\mu\nu}$ es el tensor de campo electromagnético usual $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. W_α es un supercampo quiral e invariante de gauge²²

$$\begin{aligned}
W_\alpha &\rightarrow \frac{1}{4}\bar{D}^2 D_\alpha (V + \Lambda + \Lambda^\dagger) \\
&= W_\alpha + \frac{1}{4}\bar{D}^2 D_\alpha \Lambda \quad (\text{dado que } D_\alpha \Lambda^\dagger = 0) \\
&= W_\alpha - \frac{1}{4}\bar{D}^{\dot{\beta}} \{\bar{D}_{\dot{\beta}}, D_\alpha\} \Lambda \quad (\text{dado que } \bar{D}_{\dot{\beta}} \Lambda = 0) \\
&= W_\alpha
\end{aligned} \tag{3.124}$$

donde en el último paso usamos que

$$\begin{aligned}
\{\bar{D}_{\dot{\beta}}, D_\alpha\} &= -2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu \\
[\bar{D}^{\dot{\beta}}, P_\mu] &= 0 \quad .
\end{aligned} \tag{3.125}$$

Los campos de materia, representados por supermultipletes quirales Φ , cambian frente a una transformación de supergauge como

$$\Phi \rightarrow e^{-2\Lambda} \Phi \quad , \quad \Phi^\dagger \rightarrow \Phi^\dagger e^{-2\Lambda^\dagger} \tag{3.126}$$

Combinaciones

$$\Phi^\dagger e^{2V} \Phi \tag{3.127}$$

son invariantes de gauge.

En la generalización no abeliana V pertenece a la representación adjunta del álgebra $V = V^a t_a$ y las transformaciones de gauge se implementan como

$$e^{2V} \rightarrow e^{-i2\Lambda^\dagger} e^{2V} e^{i2\Lambda} \quad \text{donde, } \Lambda = \Lambda^a t_a \tag{3.128}$$

con $[t_a, t_b] = if_{abc} t_c$. El supercampo de curvatura se define por (3.122), cuya expresión en campos componentes queda

$$W_\alpha = i\lambda_\alpha - \theta_\alpha D + \frac{i}{2}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \theta)_\alpha F_{\mu\nu} - \theta^2 (\nabla \bar{\lambda})_\alpha \tag{3.129}$$

²² W_α no es un campo quiral arbitrario, satisface el vínculo $D^\alpha W_\alpha = \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}}$.

donde ahora las expresiones para la fuerza de campo $F_{\mu\nu}$ y la derivada covariante actuando sobre el gaugino son

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu] \quad (3.130)$$

$$(\nabla \bar{\lambda})_\alpha \equiv \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu (\partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} + i[A_\mu, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}]) \quad (3.131)$$

En el caso no abeliano W_α es covariante frente a transformaciones de gauge (cf. ec.(3.124))

$$W_\alpha \rightarrow e^{-i2\Lambda} W_\alpha e^{i2\Lambda} \quad (3.132)$$

Las transformaciones supersimétricas toman la forma (3.118) recordando ahora que los campos toman valores en el álgebra de Lie del grupo de gauge elegido. El fijado del gauge de WZ en el caso no abeliano es mas sutil pero una vez realizado, el único grado de libertad que queda en Λ es el correspondiente a las transformaciones de gauge usuales, las que se realizan tomando $\Lambda = a$ donde a es un campo real.

Chapter 4

Teoría de Born-Infeld-Higgs Abelianas y cotas BPS

En este capítulo estudiamos la extensión supersimétrica $N = 2$ del modelo Born-Infeld-Higgs en tres dimensiones espacio-temporales y derivamos las ecuaciones de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) para el sector bosónico. La supersimetría impone una forma particular para el potencial del campo de Higgs y para el acoplamiento del mismo con el campo de gauge (cuya dinámica está determinada por la acción de Born-Infeld). Derivamos las cotas de Bogomol'nyi para la energía del vórtice a partir del álgebra supersimétrica; las ecuaciones BPS resultantes coinciden con las obtenidas en el modelo de Maxwell-Higgs.

Discutimos también la estructura BPS para modelos no polinómicos generales, mostrando la ineluctabilidad de las ecuaciones de Bogomol'nyi.

El interés en 3 dimensiones se debe a que en este espacio-tiempo se conocen soluciones de vórtice para las ecuaciones de Bogomol'nyi. Estos resultados son parte de las contribuciones originales de esta tesis [65].

4.1 Introducción

La extensión supersimétrica de la teoría de Born-Infeld [1]-[2] fue analizada en [55]-[56] empleando técnicas de superespacio. Mas recientemente, se estudiaron las extensiones supersimétricas de la teoría de Born-Infeld en 10 dimensiones, de interés dada su conexión con la dinámica de Dp-branas [31]-[34],[44]-[46],[57]-[61].

El objeto del presente capítulo es estudiar las relaciones de Bogomol'nyi y las soluciones BPS para el modelo de Born-Infeld-Higgs y para modelos no polinómicos generales, temas íntimamente relacionados a la extensión supersimétrica de los mismos. Con este fin, centramos el análisis en la extensión supersimétrica $N = 2$ de la teoría de Born-Infeld en tres

dimensiones espacio-temporales. La elección del espacio-tiempo $d = 3$ simplifica los cálculos sin perder generalidad. Es posible mostrar que al ser acoplada de manera particular a un campo de Higgs la teoría de Born-Infeld, admite para su sector bosónico una cota de Bogomol'nyi [18]. Esto sugiere que dicha teoría debería poder ser supersimetrizada. Como consecuencia de la construcción realizada en [18] las ecuaciones BPS resultantes coinciden con las de la teoría de Maxwell-Higgs. Este punto será discutido hacia el final del presente capítulo en conexión con la extensión supersimétrica de modelos no polinómicos generales.

Como es sabido, las relaciones de Bogomol'nyi pueden ser halladas estableciendo una desigualdad entre la energía del sistema y la carga topológica [17] o analizando las representaciones del álgebra supersimétrica en presencia de extensiones centrales [21]. Para este último punto de vista es muy instructivo derivar explícitamente, usando el método de Noether, el álgebra supersimétrica, descubriéndose así el origen de las propiedades BPS de los estados y mostrando la igualdad entre la extensión central y la carga topológica. Este procedimiento fue seguido para el modelo de Maxwell-Higgs en [23]. En el presente capítulo realizamos un análisis similar para el modelo supersimétrico de Born-Infeld-Higgs.

El plan de este capítulo es el siguiente: en la primera sección construiremos la teoría de Born-Infeld con $N = 1$ supersimetrías en $d = 4$ dimensiones dando una fórmula explícita para el lagrangiano fermiónico, necesario para la construcción de las cargas supersimétricas. En la sección siguiente resumiremos el modelo supersimétrico de Higgs con ruptura espontánea de la simetría de gauge. En la sección 4 procederemos a realizar una reducción dimensional a $d = 3$, obteniendo la teoría de Born-Infeld-Higgs con $N = 2$ supersimetrías. Mostraremos el origen supersimétrico de las ecuaciones BPS en la sección 5; el álgebra supersimétrica $N = 2$ será construida en la sección 6 en donde se discutirán las cotas de Bogomol'nyi. La sensibilidad de las ecuaciones BPS a la dinámica asociada al campo de gauge será discutida para modelos polinómicos generales en la sección 7. En la última sección discutiremos los resultados obtenidos.

4.2 El modelo supersimétrico de Born-Infeld

En esta sección construiremos el modelo de Born-Infeld (BI) con $N = 1$ supersimetrías en $d = 4$. En la próxima sección lo acoplaremos a un campo de Higgs y en la subsiguiente obtendremos mediante la técnica de reducción dimensional el lagrangiano supersimétrico $N = 2$ en $d = 3$.

El lagrangiano de la teoría de Born-Infeld en espacio plano $d = 4$ se define como [2]

$$\mathcal{L}_{BI} = \frac{\beta^2}{e^2} \left(1 - \sqrt{-\det \left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{\beta} F_{\mu\nu} \right)} \right) \quad (4.1)$$

(para las convenciones ver el apéndice A).

Calculando el determinante obtenemos¹

$$\det \left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{\beta} F_{\mu\nu} \right) = -1 - \frac{1}{2\beta^2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{16\beta^4} (F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu})^2 \quad (4.5)$$

lo que nos permite expresar (4.1) en la forma

$$\mathcal{L}_{BI} = \frac{\beta^2}{e^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{2\beta^2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{16\beta^4} (F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu})^2} \right) \quad (4.6)$$

$$= -\frac{1}{4e^2} F^2 + \frac{1}{32e^2\beta^2} ((F^2)^2 + (F\tilde{F})^2) - \frac{1}{128e^2\beta^4} F^2 ((F^2)^2 + (F\tilde{F})^2) + \dots \quad (4.7)$$

(Aquí, $\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$). De esta expresión vemos que el límite a la teoría de Maxwell se obtiene haciendo $\beta \rightarrow \infty$. El llamado límite ultra Born-Infeld corresponde a $\beta \rightarrow 0$ y da una acción topológica (ec.(4.21)).

La extensión supersimétrica del lagrangiano de Born-Infeld que presentaremos sigue los lineamientos de [55]-[56]. Es de notar, sin embargo, que si bien la derivación de la parte bosónica del lagrangiano ha sido construida en las referencias anteriormente citadas (ver tambien [57]-[58]) desarrollaremos aquí una descripción detallada pues, para nuestros fines,

¹El determinante en \mathbb{M}_4 (Minkowski $d = 4$) puede ser calculado usando

$$\det(g + F) = \exp(\text{tr} \ln(g + F)) \quad (4.2)$$

$$= -1 - 1/2 F^2 + 1/4 (F^4 - 1/2 (F^2)^2) \quad (4.3)$$

$$= -1 - 1/2 F^2 + 1/16 (F\tilde{F})^2 \quad (4.4)$$

donde $F^2 = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, $F^4 = F_\mu{}^\nu F_\nu{}^\rho F_\rho{}^\sigma F_\sigma{}^\mu$ y $F\tilde{F} = F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$. Ver el apéndice A para identidades del tensor electromagnético.

es necesario conocer también parte de los términos fermiónicos, que son necesarios para el cálculo del álgebra supersimétrica, y estos no fueron calculados en dichos trabajos.

Comenzamos escribiendo el lagrangiano de BI (4.1) en la forma

$$\mathcal{L}_{BI} = \frac{\beta^2}{e^2} \sum_{n=1}^{\infty} q_{n-1} \left(\frac{1}{2\beta^2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{16\beta^4} (F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu})^2 \right)^n \quad (4.8)$$

donde

$$q_0 = -\frac{1}{2} \\ q_n = \frac{(-1)^{n+1} (2n-1)!}{4^n (n+1)! (n-1)!} \quad \text{for } n \geq 1 \quad (4.9)$$

$$(q_0 = -\frac{1}{2}, q_1 = \frac{1}{8}, q_2 = -\frac{1}{16}, q_3 = \frac{5}{128}, q_4 = -\frac{7}{256}, \dots).$$

La Ec.(4.8) puede ser reescrita como

$$\mathcal{L}_{BI} = \frac{\beta^2}{e^2} \sum_{n=1}^{\infty} q_{n-1} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2\beta^2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right)^j \left(-\frac{1}{16} \left(\frac{1}{\beta^2} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \right)^2 \right)^{n-j} \quad (4.10)$$

El ingrediente básico en la extensión supersimétrica de la acción de BI es el supermultiplete quiral de curvatura

$$W_\alpha = \frac{1}{4} \bar{D}_{\dot{\beta}} \bar{D}^{\dot{\beta}} D_\alpha V \quad (4.11)$$

donde V es el supercampo vectorial real $V = V^\dagger$. Para la convención de las variables quirales y derivadas covariantes ver el cap. 3.

Recordemos que el lagrangiano de Maxwell $N = 1$ es construido en términos de los supercampos quirales W_α y su hermítico conjugado $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ haciendo

$$\mathcal{L}_{Maxwell}^{SUSY} = \frac{1}{4e^2} \left[\int d^2\theta W^2(y, \theta) + \int d^2\bar{\theta} \bar{W}^2(y^\dagger, \bar{\theta}) \right] \quad (4.12)$$

cuya expresión en términos de los campos componentes del multiplete vectorial es

$$\mathcal{L}_{Maxwell}^{SUSY} = \frac{1}{2e^2} \left(-\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + D^2 \right) - \frac{i}{2e^2} \left(\lambda \not{\partial} \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \not{\partial} \lambda \right) \quad (4.13)$$

Para poder construir las potencias superiores de F^2 y $F\tilde{F}$, que aparecen en (4.10), necesarias en la expresión de la acción de BI, se mostró en [55], que deben incluirse en el desarrollo potencias de los supercampos reales X y Y definidos como

$$X = \frac{1}{8} (D^2 W^2 + \bar{D}^2 \bar{W}^2) \quad (4.14)$$

$$Y = -\frac{i}{16}(D^2 W^2 - \bar{D}^2 \bar{W}^2) \quad (4.15)$$

El motivo es que, como se muestra en el apéndice,

$$X|_0 = (\frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - D^2) + i\lambda\bar{\phi}\bar{\lambda} + i\bar{\lambda}\bar{\phi}\lambda \quad (4.16)$$

$$Y|_0 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} + \lambda\bar{\phi}\bar{\lambda} - \bar{\lambda}\bar{\phi}\lambda). \quad (4.17)$$

De manera que las componentes mas bajas ($\theta = \bar{\theta} = 0$) de los supercampos X y Y incluyen los invariantes F^2 y $F\tilde{F}$. Potencias arbitrarias $(F^2)^n$ y $(F\tilde{F})^m$ se obtienen en las componentes mas bajas de X^n y Y^m respectivamente.

Consideremos entonces el siguiente lagrangiano supersimétrico que como veremos dará origen en su parte bosónica a teoría de BI

$$\mathcal{L}_{BI}^{SUSY} = \frac{1}{4e^2} \left[\int d^2\theta W^2 + \int d^2\bar{\theta} \bar{W}^2 \right] + \sum_{s,t=0}^{\infty} a_{st}^{(\beta)} \int d^4\theta W^2 \bar{W}^2 X^s Y^t \quad (4.18)$$

donde $a_{st}^{(\beta)}$ son coeficientes a determinar. La ec.(4.18) corresponde al lagrangiano propuesto en [55]-[56]. En lo que respecta al último término de (4.18), es importante señalar que para la construcción del lagrangiano de BI, no solo es necesario considerar W^2 y \bar{W}^2 sino que también se deben introducir productos de estos dos supercampos quirales. En efecto, dado que la componente mas alta $\theta^2\bar{\theta}^2$ de $W^2\bar{W}^2$ toma la forma

$$W^2\bar{W}^2|_{\theta^2\bar{\theta}^2} = \theta^2\bar{\theta}^2 \left((D^2 - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + (\frac{1}{2}\tilde{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + \text{fermiones} \right) \quad (4.19)$$

podemos ver multiplicando esta expresión por los supercampos (4.14-4.15) será posible reproducir las potencias superiores de F^2 y $F\tilde{F}$ necesarias en la expansión de (4.10)².

Mediante la construcción (4.18) es posible supersimetrizar lagrangianos \mathcal{L} de la forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4e^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sum_{s,t=0}^{\infty} c_{st} \left((\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + (\frac{1}{2}\tilde{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 \right) (F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^s (\tilde{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^t \quad (4.20)$$

Una consecuencia inmediata es que todos los lagrangianos supersimetrizables se reducen al término topológico

$$\mathcal{L}^{SUSY}|_{F=\pm i\tilde{F}} = \mp \frac{i}{4e^2}\tilde{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (4.21)$$

²No existen en $W^2\bar{W}^2$ otros términos puramente bosónicos mas que los expresados en (4.19), luego para obtener luego de la integración en el superspacio componentes puramente bosónicas necesitamos supercampos que contenga en sus componentes $\theta = \bar{\theta} = 0$ términos puramente bosónicos, y dichos supercampos son (4.14)-(4.15)

sobre soluciones autoduales, $F_{\mu\nu} = \pm i\tilde{F}_{\mu\nu}$, o sea que saturan una cota de Bogomol'nyi [14], [17],[46],[62]. El lagrangiano de BI satisface esta propiedad ya que en el caso abeliano es posible escribir ³

$$\begin{aligned}\sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + \frac{1}{\beta}F_{\mu\nu})} &= \sqrt{(1 + \frac{1}{4\beta^2}F^2)^2 - \frac{1}{16\beta^4}(F^2 + i\tilde{F}F)(F^2 - i\tilde{F}F)} \\ &= \sqrt{(1 + \frac{1}{4\beta^2}F^2)^2 - \frac{1}{64\beta^4}(F + i\tilde{F})^2(F - i\tilde{F})^2} \\ &= \sqrt{(1 \pm \frac{i}{4\beta^2}F\tilde{F})^2 + \frac{1}{4\beta^2}(F \mp i\tilde{F})^2}\end{aligned}\quad (4.22)$$

Los coeficientes $a_{st}^{(\beta)}$ en la ec.(4.18) deben ser elegidos entonces de manera de obtener como parte bosónica del lagrangiano \mathcal{L}_{BI}^{SUSY} el lagrangiano de BI ec.(4.5).

Concentrémonos en los términos puramente bosónicos de \mathcal{L}_{BI}^{SUSY} . Esto se logra poniendo los fermiones a cero:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{BI}^{SUSY}|_{BOS} &\equiv \tilde{\mathcal{L}}_{BI} \\ &= \frac{\beta^2}{e^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{2\beta^2}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - 2D^2)} - \frac{1}{16\beta^4}(F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu})^2 \right)\end{aligned}\quad (4.23)$$

Notemos que al reemplazar la ecuación de movimiento para el campo D (que en el presente caso es $D = 0$), la parte bosónica del lagrangiano supersimétrico coincide con el lagrangiano de BI $\tilde{\mathcal{L}}_{BI}|_{D=0} = \mathcal{L}_{BI}$.

Los coeficientes $a_{st}^{(\beta)}$ pueden ser calculados imponiendo la identidad (4.23). A partir de las componentes bosónicas de $W^2\bar{W}^2$ (dadas en el apéndice) es posible encontrar una relación de recurrencia que conecta los coeficientes a en el lagrangiano supersimétrico de BI con los coeficientes q de la expansión del lagrangiano de BI (ver ec.(4.9)),

$$\begin{aligned}a_{00}^{(\beta)} &= \frac{1}{8e^2\beta^2} \\ a_{n-2m\ 2m}^{(\beta)} &= \frac{(-1)^m}{e^2\beta^{2n+2}} \sum_{j=0}^m 4^{m-j} \binom{n+2-j}{j} q_{n+1-j} \\ a_{n\ 2m+1}^{(\beta)} &= 0\end{aligned}\quad (4.24)$$

$(a_{00}^{(\beta)} = \frac{1}{8}, a_{10}^{(\beta)} = -\frac{1}{16}, a_{20}^{(\beta)} = \frac{5}{128}, a_{02}^{(\beta)} = \frac{1}{32}, a_{30}^{(\beta)} = -\frac{7}{256}, a_{12}^{(\beta)} = -\frac{3}{64}, \dots, \text{donde } e^2 = \beta^2 = 1).$

³En la expresión (4.22) se debe entender $F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ y $F\tilde{F} = F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$. La fórmula (4.22) es válida en el caso no abeliano si se emplea la prescripción de traza simétrica (ver cap. 5).

Podemos a esta altura escribir una fórmula compacta en términos de supercampos para la extensión supersimétrica del lagrangiano de Born-Infeld, usando la siguiente identidad

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{BI} &= \frac{\beta^2}{e^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{2\beta^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{16\beta^4} (F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu})^2} \right) \\ &= -\frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4e^2 \beta^2} ((F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 + (F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu})^2) \mathcal{R}\end{aligned}\quad (4.25)$$

donde \mathcal{R} es la funcional de F^2 y $F\tilde{F}$ definida como

$$\mathcal{R} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4\beta^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sqrt{1 + \frac{1}{2\beta^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{16\beta^4} (F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu})^2} \right)^{-1} \quad (4.26)$$

A partir de la ec.(4.25) encontramos entonces la expresión compacta en términos de supercampos⁴

$$\mathcal{L}_{BI}^{SUSY} = \frac{1}{4e^2} \left(\int d^2\theta W^2(y, \theta) + h.c. \right) + \frac{1}{4e^2 \beta^2} \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \frac{W^2 \bar{W}^2}{1 + \frac{1}{2\beta^2} X + \sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2} X - \frac{1}{\beta^4} Y^2}} \quad (4.27)$$

Esta expresión fue hallada en [56] y discutida como realización no lineal de una segunda supersimetría en [57],[60],[61](ver también [58]).

Con el conocimiento de los coeficientes $a_{st}^{(\beta)}$, el lagrangiano supersimétrico de Born-Infeld puede ser escrito explícitamente en la forma

$$\mathcal{L}_{BI}^{SUSY} = \tilde{\mathcal{L}}_{BI} + \mathcal{L}_{fer} + \mathcal{L}_{fb} \quad (4.28)$$

donde \mathcal{L}_{fer} contiene términos puramente fermiónicos de autointeracción mientras que \mathcal{L}_{fb} incluye los términos cinéticos de los fermiones y términos cruzados bosón-fermión. Ambos términos pueden ser calculados como expansiones en potencias crecientes de campos fermiónicos y bosónicos. Para la discusión que nos proponemos hacer de las relaciones de Bogomol'nyi a través del álgebra supersimétrica, veremos que será necesario conocer solo ciertos términos cuadráticos en los fermiones (ver sección [1.5]).

Para ser precisos, solo los términos cuadráticos de la forma $\lambda \partial_\mu \bar{\lambda}$ y $\bar{\lambda} \partial_\mu \lambda$ contribuyen al álgebra de cargas⁵. Por lo que escribiremos explícitamente, solo tales términos en \mathcal{L}_{fb} .

⁴Entonces, los coeficientes a son los correspondientes al desarrollo $1/4(1 + X/2 + \sqrt{1 + X - Y^2})^{-1} = \sum a_{st} X^s Y^t$.

⁵Términos de orden mayor a dos en fermiones se anulan al poner los fermiones a cero en el álgebra de cargas luego de calcular los conmutadores. Los términos sin derivadas no contribuyen a las cargas supersimétricas.

Analizando las componentes de los supercampos $W^2\bar{W}^2$, X e Y (ver apéndice B), vemos que los términos que nos interesan en el producto $W^2\bar{W}^2X^sY^t$ son cuatro y corresponden esquemáticamente a las siguientes componentes en términos de fermiones

$$\begin{aligned}
\underbrace{W^2\bar{W}^2} & \cdot \underbrace{X^sY^t}_{|\theta^2\bar{\theta}^2} \\
\underline{\theta^2\bar{\theta}} : \bar{\lambda} & \longleftrightarrow \underline{\bar{\theta}} : \partial\lambda \\
\underline{\bar{\theta}^2\theta} : \lambda & \longleftrightarrow \underline{\theta} : \partial\bar{\lambda} \\
\underline{\theta^2\bar{\theta}^2} : \lambda\partial\bar{\lambda} & \longleftrightarrow \underline{\theta = \bar{\theta} = 0} : 0 \\
\underline{\theta^2\bar{\theta}^2} : 0 & \longleftrightarrow \underline{\theta = \bar{\theta} = 0} : \lambda\partial\bar{\lambda}
\end{aligned}$$

Denotaremos como $\mathcal{L}_{fb}^I + \mathcal{L}_{fb}^{II}$ a la suma de los términos relevantes (los términos restantes de orden mayor o igual en campos fermiónicos pueden ser calculados facilmente), tenemos entonces

$$\mathcal{L}_{fb} = \mathcal{L}_{fb}^I[\lambda, \partial\bar{\lambda}] + \mathcal{L}_{fb}^{II}[\bar{\lambda}, \partial\lambda] + \text{otros términos} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{fb}^I[\lambda, \partial\bar{\lambda}] &= -\frac{i}{2e^2}\lambda\partial\bar{\lambda} - i \sum_{s,t=0}^{\infty} a_{st}^{(\beta)} \lambda\sigma^\nu\partial_\mu\bar{\lambda}(X_{BOS})^{s-1}(Y_{BOS})^{t-1} \\
&\left(-2iX_{BOS}Y_{BOS} + A^*(isY_{BOS} + \frac{t}{2}X_{BOS})\right) \left(A\delta_\nu^\mu + \frac{1}{2}\Omega^{*\mu\rho}\Omega_{\rho\nu}\right)
\end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\mathcal{L}_{fb}^{II}[\bar{\lambda}, \partial\lambda] = \mathcal{L}_{fb}^I[\lambda, \partial\bar{\lambda}]^\dagger \quad (4.31)$$

donde

$$\begin{aligned}
X_{BOS} &= \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - D^2 \\
Y_{BOS} &= \frac{1}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}
\end{aligned} \quad (4.32)$$

Las expresiones de A y $\Omega^{*\mu\rho}\Omega_{\rho\nu}$, calculadas en el apéndice, están dadas por

$$A = D^2 - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{i}{2}F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \quad (4.33)$$

$$\Omega^{*\nu\rho}\Omega_{\rho\mu} = \left(D^2 + \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)\delta_\mu^\nu - 2D\eta^{\nu\rho}\tilde{F}_{\rho\mu} + 2F^{\nu\rho}F_{\rho\mu} \quad (4.34)$$

Reescribiendo los términos fermiónicos mediante espinores de Majorana de cuatro componentes Λ (ver apéndice A), tenemos para \mathcal{L}_{fb}

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{fb} = & -\frac{i}{2e^2}\bar{\Lambda}\not{\partial}\Lambda + \sum_{s,t=0}^{\infty} a_{st}^{(\beta)} X_{BOS}^{s-1} Y_{BOS}^{2t-1} \\
& \left(i\bar{\Lambda}\not{\partial}\Lambda Y_{BOS} \left[s(X_{BOS}^2 + 4Y_{BOS}^2) - X_{BOS}(Z_{BOS} - 2X_{BOS}) \right] \right. \\
& + 2i\bar{\Lambda}\Gamma^\mu \partial^\nu \Lambda (D\tilde{F}_{\nu\mu} - F_{\nu\rho}F^\rho_\mu) \left[X_{BOS}Y_{BOS} + 2(2sY_{BOS}^2 + tX_{BOS}^2) \right] \\
& + \bar{\Lambda}\Gamma^5 \not{\partial}\Lambda X_{BOS} \left[t(X_{BOS}^2 + 4Y_{BOS}^2) + 4Y_{BOS}^2 + Y_{BOS}Z_{BOS}(s-2t) \right] \\
& \left. - 2\bar{\Lambda}\Gamma^5\Gamma^\mu \partial^\nu \Lambda (D\tilde{F}_{\nu\mu} - F_{\nu\rho}F^\rho_\mu) X_{BOS}Y_{BOS}(s-2t) \right) + \text{otros térm.} \quad (4.35)
\end{aligned}$$

donde X_{BOS} y Y_{BOS} fueron definidos en (4.32) y

$$Z_{BOS} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + D^2 \quad (4.36)$$

Terminamos esta sección señalando que el lagrangiano supersimétrico de Born-Infeld (4.28)

$$\mathcal{L}_{BI}^{SUSY} = \tilde{\mathcal{L}}_{BI} + \mathcal{L}_{fer} + \mathcal{L}_{fb}$$

es invariante bajo las siguientes transformaciones de supersimetría $N = 1$

$$\begin{aligned}
\delta_\Upsilon A_\mu &= -i\tilde{\Upsilon}\Gamma_\mu\Lambda & \delta_\Upsilon D &= -\tilde{\Upsilon}\Gamma^5\not{\partial}\Lambda \\
\delta_\Upsilon \Lambda &= i(-F_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu} + D\Gamma^5)\Upsilon
\end{aligned} \quad (4.37)$$

donde Υ es el parámetro de la transformación supersimétrica (fermión de Majorana) construido a partir de los parámetros de Weyl ϵ y $\bar{\epsilon}$.

4.3 El modelo supersimétrico de Higgs

En la sección anterior construimos la teoría de Born-Infeld supersimétrica $N = 1$ en $d = 4$. El lagrangiano construido determina la dinámica del campo de gauge. Dado que estamos buscando relaciones de Bogomol'nyi para la teoría de gauge espontáneamente rota, consideraremos, además del lagrangiano ya obtenido, un lagrangiano supersimétrico de Higgs invariante de gauge al que agregaremos el término de Fayet-Iliopoulos para que la simetría de gauge este espontáneamente rota (realizada en el modo de Goldstone). Este lagrangiano

puede ser construido a partir del multiplete escalar quiral Φ acoplado al supercampo vectorial real V . El modelo es bien conocido y lo describiremos fundamentalmente para establecer nuestras convenciones.

El bloque de materia necesario en la construcción de la acción supersimétrica de Higgs es el supermultiplete chiral $\Phi = (\phi, \psi, G)$ cuya expansión es

$$\Phi(y, \theta) = \phi + \sqrt{2}\theta\psi + \theta^2 G \quad (4.38)$$

Contiene un campo escalar complejo ϕ (campo de Higgs), un espinor de Weyl ψ (higgsino) y un campo auxiliar complejo G . La acción supersimétrica de Higgs invariante de gauge requiere además introducir el multiplete vectorial real $V_{WZ} = (A_\mu, \lambda, D)$ que describimos en la sección anterior.

La acción de Higgs invariante de gauge con ruptura espontánea de simetría se escribe

$$\mathcal{L}_{Higgs}^{SUSY} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \left(\Phi^\dagger e^{2V} \Phi - 2\xi^2 V \right). \quad (4.39)$$

El primer término da lugar a los términos cinéticos invariantes de gauge para los campos pertenecientes al supermultiplete Φ , mientras que el segundo (término de Fayet-Iliopoulos) genera la ruptura de simetría, cuando se reemplaza en la acción la ecuación de movimiento para el campo auxiliar D (ξ es el parámetro dimensional de Fayet-Iliopoulos). La acción (4.39) en términos de los campos componentes de los supermultipletes queda, en el gauge de WZ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Higgs}^{SUSY} = & D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - \frac{i}{2} \bar{\Psi} \not{D}^{(5)} \Psi + G^\dagger G + \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\bar{\Lambda} \Gamma^5 \Psi (\phi + \phi^\dagger) - \bar{\Lambda} \Psi (\phi - \phi^\dagger) \right) \\ & + D \phi^\dagger \phi - \xi^2 D \end{aligned} \quad (4.40)$$

Hemos reagrupado los espinores de Weyl ψ y $\bar{\psi}$ en un espinor de Majorana Ψ . Las derivadas covariantes son $D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$ si actúan sobre el campo escalar ϕ y $D_\mu^{(5)} = \partial_\mu + i\Gamma^5 A_\mu$ si actúan sobre el fermión de Majorana Ψ ⁶. La acción (4.40) es invariante frente a las siguientes

⁶El fermión de Majorana solo puede aparecer acoplado quiralmente al campo de gauge debido a que $\bar{\Psi} \Gamma^\mu \Psi = 0$.

transformaciones de supersimetría (en notación de Weyl) ⁷

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon^{(WZ)}\phi &= \sqrt{2}\epsilon\psi & \delta_\epsilon^{(WZ)}G &= i\sqrt{2}\bar{\epsilon}\bar{D}\psi + 2i\bar{\epsilon}\bar{\lambda}\phi \\ \delta_\epsilon^{(WZ)}\psi &= \sqrt{2}G\epsilon + i\sqrt{2}\not{D}\phi\bar{\epsilon}\end{aligned}\tag{4.41}$$

donde ϵ es el parámetro (Weyl) de la transformación supersimétrica y $\bar{D} = \bar{\sigma}^\mu D_\mu$ con $D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$.

Recordemos brevemente cómo se genera la ruptura espontánea de simetría en el modelo supersimétrico de Maxwell-Higgs. Al agregar a la acción (4.39) la dinámica de Maxwell (4.12), los términos que contienen al campo auxiliar D son (ver (4.13),(4.40))

$$\mathcal{L}_D = \frac{1}{2e^2}D^2 + D(|\phi|^2 - \xi^2)\tag{4.42}$$

La ecuación de movimiento para D resulta

$$\frac{1}{e^2}D + (|\phi|^2 - \xi^2) = 0\tag{4.43}$$

obteniéndose, al reinsertar la expresión para D en el lagrangiano, un potencial efectivo para el campo de Higgs ϕ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{bos} &= -\frac{1}{4e^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + D_\mu\phi^\dagger D^\mu\phi - V[\phi] \\ V[\phi] &= \frac{1}{2e^2}D^2 = \frac{e^2}{2}(|\phi|^2 - \xi^2)^2\end{aligned}\tag{4.44}$$

Vemos claramente que la invarianza frente a supersimetría impone una relación entre la constante de acoplamiento de gauge e y el acoplamiento en el potencial de Higgs λ que coincide con la condición de Bogomol'nyi⁸

$$\lambda = \frac{e^2}{2}\tag{4.45}$$

para la existencia de una cota para la energía y ecuaciones de primer orden cuyas soluciones satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange del modelo [15],[17],[23].

⁷Las transformaciones (4.41) corresponden a la composición de una transformación de supersimetría y una transformación de supergauge para permanecer en el gauge de WZ, esta es la razón por la que aparece la derivada covariante en la transformación para el higgsino y el campo auxiliar (ver discusión en el cap. 3).

⁸Esta misma relación se deduce, en un análisis puramente algebraico, completando cuadrados en la expresión para la energía de las soluciones[17].

Estudiaremos ahora el caso en el que la dinámica del campo de gauge está dada por la acción de Born-Infeld. Veremos cómo el potencial ad-hoc para el campo de Higgs propuesto en [18] para lograr una cota de Bogomol'nyi, está determinado unívocamente por la invarianza supersimétrica del modelo BIH.

4.4 El modelo supersimétrico $N = 2$ de Born-Infeld-Higgs en $d = 3$

Procederemos ahora a la reducción dimensional a $d = 3$ dimensiones espacio-temporales. Mediante este procedimiento obtendremos una teoría supersimétrica $N = 2$. Es en este caso en el que las relaciones de Bogomol'nyi aparecen relacionadas con la supersimetría.

La reducción dimensional se realiza de la siguiente forma: los campos se toman independientes de x_3 ($\partial_3 = 0$)⁹. Para el campo vectorial A_μ se toma $A_3 = N$ donde N transforma como un escalar bajo $SO(2, 1)$. Tenemos entonces un campo escalar real extra con dinámica al reducir a un modelo 3-dimensional. La reducción dimensional de un fermión de Majorana en $d = 4$ da origen a dos fermiones de Majorana $d = 3$ que se pueden acomodar como un fermión de Dirac en $d = 3$ (ver apéndice C)¹⁰.

Reduciendo dimensionalmente (4.28), obtenemos la acción de Born-Infeld $N = 2$

$$S^{(3)} = S_{bos}^{(3)} + S_{fb}^{(3)} + S_{fer}^{(3)} \quad (4.46)$$

Aquí

$$S_{bos}^{(3)} = \frac{\beta^2}{e^2} \int d^3x \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2} D^2 + \frac{1}{2\beta^2} F^{ij} F_{ij} - \frac{1}{\beta^2} \partial_i N \partial^i N - \frac{1}{\beta^4} (\tilde{F}_k \partial^k N)^2} \right) \quad (4.47)$$

En lo que respecta a $S_{fb}^{(3)}$, puede ser escrita como

$$S_{fb}^{(3)} = -\frac{i}{2e^2} \int d^3x \bar{\Sigma} \not{\partial} \Sigma + i \sum_{s,t=0}^{\infty} a_{st}^{(\beta)} \left(X^{(3)} \right)^{s-1} \left(Y^{(3)} \right)^{2t-1}$$

⁹Desde el punto de vista de Kaluza-Klein, la idea es pensar que x^3 es una coordenada compacta. Al desarrollar los campos en Fourier para x^3 solo excitamos el modo cero.

¹⁰La aparición de N y los dos fermiones de Majorana de dos componentes es natural cuando se estudia la descomposición de representaciones de $SO(3, 1) \supset SO(2, 1)$.

$$\begin{aligned}
& \left\{ \bar{\Sigma} \not{\partial} \Sigma \left[s \left((X^{(3)})^2 + (Y^{(3)})^2 \right) Y^{(3)} + (2X^{(3)} - Z^{(3)}) X^{(3)} Y^{(3)} \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} t X^{(3)} \left((X^{(3)})^2 + (Y^{(3)})^2 \right) + (Y^{(3)})^2 X^{(3)} \left. \right] - \bar{\Sigma} \gamma^i \partial^j \Sigma \\
& \left(X^{(3)} \eta_{ij} + 2F_{ik} F_j^k \right) \left[X^{(3)} Y^{(3)} (F_{ik} F_j^k + \frac{s}{2} - t) \right. \\
& + \left. \left(s (Y^{(3)})^2 + t (X^{(3)})^2 \right) \right] \\
& \left. + \bar{\Sigma} \partial^j \Sigma D \tilde{F}_j \left[(Y^{(3)})^2 + 2t (X^{(3)})^2 - (1 + 2s - 4t) X^{(3)} Y^{(3)} \right] \right\} + \mathcal{O}(\Sigma^4) \quad (4.48)
\end{aligned}$$

donde

$$X^{(3)} = \frac{1}{2} F_{ij} F^{ij} - D^2 - (\partial_i N)^2 \quad (4.49)$$

$$Y^{(3)} = \tilde{F}^i \partial_i N \quad (4.50)$$

$$Z^{(3)} = D^2 + \frac{1}{2} F_{ij} F^{ij} \quad (4.51)$$

y Σ es un fermión de Dirac construido a partir de la reducción dimensional de Λ

$$\Sigma = \lambda_2 + i\lambda_1 \quad (4.52)$$

Finalmente, $S_{fer}^{(3)}$ es la acción puramente fermiónica obtenida mediante reducción dimensional cuya forma explícita es irrelevante para nuestros propósitos, o sea el cálculo del álgebra supersimétrica.

Procedamos ahora a reducir dimensionalmente la acción de Higgs (4.39). La misma toma la forma [23]

$$\begin{aligned}
S_{Higgs}^{(3)} = \int d^3x & \left(|D_i \phi|^2 - \frac{i}{2} \bar{\Omega} \not{D} \Omega + |G|^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\Omega} \Sigma \phi + \bar{\Sigma} \Omega \phi^\dagger) + \right. \\
& \left. D(|\phi|^2 - \xi^2) + \frac{1}{2} N \bar{\Omega} \Omega - N^2 |\phi|^2 \right) \quad (4.53)
\end{aligned}$$

Aquí ϕ es un escalar complejo cargado, Ω es el espinor de Dirac construido a partir de la reducción dimensional de Ψ como

$$\Omega = \psi_1 + i\psi_2 \quad (4.54)$$

N un escalar real y G un campo auxiliar complejo. La derivada covariante está definida como

$$D_i = \partial_i + iA_i. \quad (4.55)$$

Usando la trivial ecuación de movimiento para el campo auxiliar G , la acción (4.53) se reduce a

$$S_{Higgs}^{(3)} = \int d^3x \left(|D_i \phi|^2 - \frac{i}{2} \bar{\Omega} \not{D} \Omega - \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\Omega} \Sigma \phi + \bar{\Sigma} \Omega \phi^\dagger) + D(|\phi|^2 - \xi^2) + \frac{1}{2} N \bar{\Omega} \Omega - N^2 |\phi|^2 \right). \quad (4.56)$$

La acción supersimétrica $N = 2$ de Born-Infeld-Higgs en $d = 3$ está dada finalmente por

$$S_{SUSY}^{(3)} = S_{bos}^{(3)} + S_{fb}^{(3)} + S_{fer}^{(3)} + S_{Higgs}^{(3)} \quad (4.57)$$

donde las diferentes acciones fueron definidas en las ecs.(4.46)-(4.48) y (4.56). Las dimensiones de los parámetros y campos en unidades de masa son:

$$[\beta] = m^2 \quad [e] = m^{\frac{1}{2}} \quad [\xi] = m^{\frac{1}{2}} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} [(A_\mu, N, \Sigma, D)] &= (m, m, m^{\frac{3}{2}}, m^2) \\ [(\phi, \Omega, G)] &= (m^{\frac{1}{2}}, m, m^{\frac{3}{2}}) \end{aligned} \quad (4.59)$$

La acción (4.57) es invariante bajo las siguientes transformaciones de supersimetría $N = 2$

$$\begin{aligned} \delta_Y \phi &= \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{Y} \Omega & \delta_Y \Omega &= i\sqrt{2} (i \not{D} \phi + N \phi) Y & \delta_Y N &= -\frac{i}{2} \bar{Y} \Sigma + \text{h.c.} \\ \delta_Y A_i &= -\frac{i}{2} \bar{Y} \gamma_i \Sigma + \text{h.c.} & \delta_Y \Sigma &= -i(\Delta_{ij} F^{ij} + D - \frac{i}{2} \not{D} N) Y & \delta_Y D &= -\frac{1}{2} \bar{Y} \not{D} \Sigma + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (4.60)$$

donde hemos reagrupado los 2 parámetros independientes en un fermión de Dirac $Y = \epsilon_2 + i\epsilon_1$.

Recapitulemos el contenido de campos luego de la reducción dimensional y veamos su origen

$$\begin{aligned} & \begin{array}{ccc} d=4 & & d=3 \\ V : \left\{ \begin{array}{ccc} A_\mu & \rightarrow & A_i \oplus N \\ \Lambda \text{ (Majorana)} & \rightarrow & \Sigma \text{ (Dirac)} \\ D & \rightarrow & D \end{array} \right. \\ \Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \phi & \rightarrow & \phi \\ \Psi \text{ (Majorana)} & \rightarrow & \Omega \text{ (Dirac)} \\ G & \rightarrow & G \end{array} \right. \end{array} \end{aligned}$$

La reducción dimensional genera a partir del supercampo real V en $d = 4$: dos multipletes $N = 1$ en $d = 3$ uno espinorial real (A_i, λ_1) y otro escalar real (N, λ_2) que resultan estar

acoplados de manera de poder ser acomodados en un multiplete supersimétrico $N = 2$ en $d = 3$. De manera análoga tenemos para el supercampo quiral Φ en $d = 4$: dos multipletes escalares reales (ϕ_1, ψ_1) y (ϕ_2, ψ_2) , donde en estos últimos ϕ_1 y ϕ_2 son las componentes real e imaginaria de ϕ , y ψ_1 y ψ_2 los fermiones que provienen de la reducción dimensional de Ψ , ambos multipletes acoplados de manera que es posible acomodarlos en un supermultiplete $N = 2$ en $d = 3$.

La acción (4.57) contiene aún el campo auxiliar D . Partiendo de la acción (4.57) con todos los fermiones puestos a cero, tenemos para el campo auxiliar

$$\mathcal{L}_D = -\frac{\beta^2}{e^2} \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2} D^2 + \frac{1}{2\beta^2} F^{ij} F_{ij} - \frac{1}{\beta^2} \partial_i N \partial^i N - \frac{1}{\beta^4} (\varepsilon_{ijk} F^{ij} \partial^k N)^2} + D(|\phi|^2 - \xi^2) \quad (4.61)$$

La ecuación de movimiento para D resulta,

$$D = -\frac{e^2(|\phi|^2 - \xi^2)}{\sqrt{1 + \frac{e^4}{\beta^2}(|\phi|^2 - \xi^2)^2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2\beta^2} F^{ij} F_{ij} - \frac{1}{\beta^2} \partial_i N \partial^i N - \frac{1}{\beta^4} (\varepsilon_{ijk} F^{ij} \partial^k N)^2} \quad (4.62)$$

Reinsertando en la acción (4.61) y poniendo los fermiones a cero obtenemos la acción bosónica

$$S_{SUSY}^{(3)}|_{fer=0} = \int d^3x \frac{\beta^2}{e^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{e^4}{\beta^2}(|\phi|^2 - \xi^2)^2} \times \sqrt{1 + \frac{1}{2\beta^2} F^{ij} F_{ij} - \frac{1}{\beta^2} \partial_i N \partial^i N - \frac{1}{\beta^4} (\varepsilon_{ijk} F^{ij} \partial^k N)^2} \right) + |D_i \phi|^2 - N^2 |\phi|^2 \quad (4.63)$$

que en el límite $\beta \rightarrow \infty$ coincide como era de esperar con la reducción a $d = 3$ del modelo de Maxwell-Higgs (4.44).

Es interesante destacar que en nuestro tratamiento, el potencial de ruptura de simetría aparece como un factor multiplicativo dentro de la raíz cuadrada de BI, como resultado de la extensión supersimétrica de la teoría bosónica (4.1) acoplada a un campo de Higgs. Esto significa que, *la invarianza supersimétrica $N = 2$ fuerza esta particular forma funcional para la acción* (lo mismo sucede si uno permanece en $d = 4$ con una teoría $N = 1$). En [18] esta forma funcional fue seleccionada del conjunto infinito de posibilidades de acoplar el campo de Higgs y su potencial de ruptura de simetría a la teoría de BI, pidiendo que el modelo tuviera las ecuaciones de Bogomol'nyi usuales [17]. Luego, la supersimetría explica la razón de tal elección asociada al modelo de Born-Infeld-Higgs.

4.5 Cota à la Bogomol'nyi

Veamos cómo, a partir de la acción (4.63), es posible obtener una cota à la *Bogomol'nyi* para la energía de las soluciones (cf.[17],[18]). Partiendo de la acción bosónica (4.63) consideremos el caso estático con $A_0 = N = 0$. En este caso la densidad de energía de una configuración está dada por (cf.[17])¹¹

$$\mathcal{E} = \frac{\beta^2}{e^2} \sqrt{1 + \frac{e^4}{\beta^2} (|\phi|^2 - \xi^2)^2} \sqrt{1 + \frac{1}{2\beta^2} F^{ab} F_{ab}} - \frac{\beta^2}{e^2} + |D_a \phi|^2 \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\beta^2}{e^2} \sqrt{\left(1 \mp \frac{e^2}{\beta^2} B (|\phi|^2 - \xi^2)\right)^2 + \frac{1}{\beta^2} \left(B \pm e^2 (|\phi|^2 - \xi^2)\right)^2} - \frac{\beta^2}{e^2} \\ &+ \frac{1}{2} (\varepsilon_{ab} D_a \phi_c \mp \varepsilon_{cd} D_b \phi_d)^2 \pm \varepsilon_{ab} \varepsilon_{cd} D_a \phi_c D_b \phi_d \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} &\geq \mp B (|\phi|^2 - \xi^2) \pm \varepsilon_{ab} \varepsilon_{cd} D_a \phi_c D_b \phi_d \\ &\geq \pm \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ab} F_{ab} (|\phi|^2 - \xi^2) + \varepsilon_{ab} \varepsilon_{cd} D_a \phi_c D_b \phi_d \right) \\ &\geq \pm \partial_a S_a \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$S_a = \varepsilon_{ab} (\varepsilon_{cd} \phi_c D_b \phi_d - A_b \xi^2) \quad (4.70)$$

La igualdad se cumple cuando se satisfacen las ecuaciones de Bogomol'nyi

$$F_{ab} = \pm \varepsilon_{ab} e^2 (|\phi|^2 - \xi^2) \quad (4.71)$$

$$\varepsilon_{ab} D_a \phi_c = \pm \varepsilon_{cd} D_b \phi_d \quad , \quad (4.72)$$

¹¹Analizamos el caso estático por lo que los índices que emplearemos $a, b = 1, 2$ corren solo sobre las componentes espaciales del plano bidimensional.

- El tensor ε_{ab} lo definimos completamente antisimétrico con $\varepsilon_{12} = 1$.
- Descomponemos la derivada covariante sobre el campo de Higgs en sus partes real e imaginaria

$$D_a \phi = (\partial_a + iA_a)(\phi_1 + i\phi_2) = (\partial_a \phi_1 - A_a \phi_2) + i(\partial_a \phi_2 + A_a \phi_1) \quad (4.64)$$

definiendo

$$D_a \phi_b = (\partial_a \phi_b - \varepsilon_{bc} A_a \phi_c) \quad (4.65)$$

donde como es usual los índices internos (en el espacio complejo) se mezclan con los de espacio tiempo. Con estas definiciones vale la siguiente igualdad

$$\varepsilon_{ab} (D_a \phi)^* D_b \phi = i \varepsilon_{ab} \varepsilon_{cd} D_a \phi_c D_b \phi_d \quad (4.66)$$

que para el presente modelo coinciden con las del modelo de Maxwell-Higgs cf.[17] (ver sec. 4.8). La ecuación (4.72) se suele escribir en forma compacta como

$$\mathbb{D}\phi = 0 \quad o \quad \bar{\mathbb{D}}\phi = 0 \quad (4.73)$$

definiendo $\mathbb{D} = D_1 + iD_2$ y $\phi = \phi_1 + i\phi_2$.

Para hallar la energía E de las soluciones integramos \mathcal{E} en el plano. Cuando la configuración tiene energía finita, necesariamente $D_a\phi_c \rightarrow 0$ en el infinito. Luego, solo contribuye el segundo término de (4.70) quedando

$$E^{(vort)} \geq \left| \int d^2x \operatorname{div} \vec{S} \right| = \xi^2 \left| \oint_{S_\infty^1} \vec{A} \cdot \vec{dx} \right| = \xi^2 \Theta \quad (4.74)$$

donde denotamos por Θ al flujo magnético que, en las soluciones solitónicas, resulta estar cuantizado [63],[64],[17]

$$\Theta = 2\pi|n| \quad (4.75)$$

La energía del vórtice BPS resulta ser independiente de la constante de acoplamiento e^{12}

$$E_{BPS}^{(vort)} = \xi^2 2\pi|n| \quad (4.77)$$

4.6 Ecuaciones BPS en el modelo de Born-Infeld-Higgs

Como vimos en el capítulo anterior, al extender las supersimetrías del modelo de $N = 1$ a $N = 2$, y en presencia de cargas centrales, es posible tener representaciones masivas “cortas” del álgebra¹³. Veremos que los estados bosónicos correspondientes a estas representaciones satisfacen ecuaciones diferenciales de primer orden o ecuaciones de Bogomol’nyi-Prasad-Sommerfield [22]-[23]. El álgebra supersimétrica que da origen a la cota de Bogomol’nyi, deducida algebraicamente en las ecs.(4.67)-(4.69), será discutida en la próxima sección.

¹²Expresando la relación (4.76) en términos de la masa del vector de gauge $M_v^2 = 2e^2\xi^2$ queda una expresión comparable a la del monopolio [63],[64]

$$E_{BPS}^{(vort)} = M_v^2 \frac{\pi n}{e^2} \quad E_{BPS}^{(mon)} = M_w \frac{4\pi m}{e^2} \quad (4.76)$$

La diferencia a señalar entre $d = 2 + 1$ y $d = 3 + 1$ es que en el primer caso la constante de acoplamiento es dimensional $[e] = m^{1/2}$ mientras que en el segundo es adimensional.

¹³Estas representaciones masivas llamadas BPS como señalamos, son las únicas que pueden volverse no-masivas mediante mecanismos dinámicos[13],[54].

Desde el punto de vista supersimétrico, las ecuaciones de Bogomol'nyi (4.71)-(4.72) se derivan del análisis de las variaciones supersimétricas del gaugino y el higgsino. Considerando las variaciones supersimétricas para estos fermiones ecs.(4.60) en el caso estático con $A_0 = N = 0$ tenemos

$$\begin{aligned}\delta_{\Upsilon}\Omega &= -\sqrt{2}\gamma^a D_a \phi \Upsilon \\ \delta_{\Upsilon}\Sigma &= -i(\Delta_{ab}F^{ab} + D)\Upsilon\end{aligned}\tag{4.78}$$

Eligiendo para las matrices γ la siguiente representación

$$\gamma^0 = \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = i\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.79}$$

obtenemos

$$\delta_{\Upsilon}\Omega = -i\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{D}\phi \\ \mathbb{D}\phi & 0 \end{pmatrix} \Upsilon \tag{4.80}$$

$$\delta_{\Upsilon}\Sigma = -i\begin{pmatrix} D+B & 0 \\ 0 & D-B \end{pmatrix} \Upsilon \quad . \tag{4.81}$$

donde hemos usado (4.73).

Descomponiendo el parámetro supersimétrico $N = 2$ como $\Upsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix}$ vemos que las ecuaciones BPS para un “fondo” solitónico (anti-solitónico) resultan de imponer la anulación de las variaciones supersimétricas (4.80) y (4.81) generadas por ϵ_1 (ϵ_2). La otra mitad de los generadores supersimétricos es no nula y se dice que la mitad de la supersimetría está rota. El efecto de estas cargas rotas actuando sobre el estado bosónico BPS es el de generar los estados fermiónicos del multiplete “corto” $\frac{1}{2}$ -BPS.

Las ecuaciones BPS para un vórtice con flujo magnético positivo y el modo cero fermiónico sobre el mismo (compañero SUSY) se obtiene mediante las condiciones

$$\delta_{\epsilon_2}\Sigma = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\varepsilon_{0ij}F^{ij} = -D \tag{4.82}$$

$$\delta_{\epsilon_2}\Omega = 0 \quad \rightarrow \quad D_1\phi = -iD_2\phi \tag{4.83}$$

$$\delta_{\epsilon_1}\Sigma \neq 0$$

$$\delta_{\epsilon_1}\Omega \neq 0 \tag{4.84}$$

Usando la fórmula explícita para D podemos reescribir (4.82) en la forma

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{0ij}F^{ij} = \frac{e^2(|\phi|^2 - \xi^2)}{\sqrt{1 + \frac{e^4}{\beta^2}(|\phi|^2 - \xi^2)^2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2\beta^2}F^{ij}F_{ij}} \quad (4.85)$$

De estas ecuaciones, obtenemos una expresión simple para el campo magnético que de hecho coincide con la ecuación de Bogomol'nyi usual obtenida cuando la dinámica esta determinada por la acción de Maxwell (ver ec.(4.43))

$$B \equiv -\frac{1}{2}\varepsilon_{0ij}F^{ij} = e^2(\xi^2 - |\phi|^2) \quad (4.86)$$

Esto se sigue de la expresión explícita dada por (4.62); elevando al cuadrado y separando potencias en $1/\beta^2$ queda

$$D^2 - \left(e^2(|\phi|^2 - \xi^2)\right)^2 + \frac{(e^2(|\phi|^2 - \xi^2))^2}{\beta^2}(D^2 - \frac{1}{2}F^2) = 0 \quad (4.87)$$

Luego, $D = -e^2(|\phi|^2 - \xi^2)$ válida a orden cero en $1/\beta^2$, también es solución a todo orden ya que de (4.62) se sigue que $D^2 = \frac{1}{2}F^2$.

Las ecuaciones (4.86) y (4.83) son las ecuaciones de Bogomol'nyi para el sistema de Born-Infeld-Higgs. Coinciden con las que aparecen en el sistema de Maxwell-Higgs (las ecuaciones originales de Bogomol'nyi [17]-[15]) y tienen entonces las mismas soluciones exactas encontradas originalmente en [15].

El hecho de que las ecuaciones de Bogomol'nyi coincidan con las del modelo de Maxwell-Higgs no es casualidad y será analizado en la última sección. En la proxima sección obtendremos la cota en la energía desde la perspectiva supersimétrica analizando el álgebra supersimétrica.

4.7 Algebra supersimétrica $N = 2$ y cota de Bogomol'nyi

A partir del modelo 3-dimensional definido por la acción (4.46), se puede fácilmente construir la corriente conservada asociada a la supersimetría, mediante el procedimiento de Noether, y, a partir de ella, los conmutadores de las cargas. Las correspondientes supercargas \bar{Q} y Q pueden ser escritas de la siguiente forma

$$\bar{Q}\Upsilon \equiv \int d^2x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Sigma)} \delta_\Upsilon \Sigma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Omega)} \delta_\Upsilon \Omega \right) \quad (4.88)$$

$$Q \equiv \gamma^0 \bar{Q}^\dagger \quad (4.89)$$

Luego de un poco de álgebra se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{Q} = -\frac{1}{2} \int d^2x \Sigma^\dagger \left(\frac{1}{e^2} + 2 \sum_{s=0}^{\infty} a_{s0}^{(\beta)} (B^2 - D^2)^s ((2s+3)D^2 - \right. \\ \left. B^2 - 2(s+1)\gamma^0 BD) \right) (\gamma^0 B + D) + \frac{i}{\sqrt{2}} \int d^2x \Omega^\dagger \not{D} \phi \end{aligned} \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} Q = -\frac{1}{2} \int d^2x (B + \gamma^0 D) \left(\frac{1}{e^2} + 2 \sum_{s=0}^{\infty} a_{s0}^{(\beta)} (B^2 - D^2)^s \right. \\ \left. ((2s+3)D^2 - B^2 - 2(s+1)\gamma^0 BD) \right) \Sigma - \frac{i}{\sqrt{2}} \int d^2x \gamma^0 (\not{D} \phi)^\dagger \Omega \end{aligned} \quad (4.91)$$

Consideramos aquí vórtices de Nielsen-Olesen, tomando $A_0 = N = 0$ luego de la diferenciación, y nos restringimos al caso estático. Más importante, solo hemos incluido términos lineales en los campos fermionicos, pues estamos interesados en derivar, a partir del álgebra supersimétrica, los términos puramente bosónicos que dan origen a las ecuaciones de Bogomol'nyi. Términos no lineales en fermiones necesariamente dan contribuciones fermiónicas que se anulan al poner los fermiones a cero una vez calculada el álgebra.

Del álgebra de cargas supersimétricas (3.20) para nuestro modelo podemos obtener explícitamente la cota de Bogomol'nyi en términos de la energía y la carga central. Dado que la expansión del lagrangiano de BI en potencias de $1/\beta^2$ da origen a primer orden a la teoría de Maxwell será instructivo mostrar cómo obtenemos a este orden las correspondientes contribuciones al álgebra supersimétrica y presentar luego los argumentos que conducen al resultado completo. Tenemos entonces para las cargas supersimétricas a orden cero en $1/\beta^2$, que denotamos como $\bar{Q}^{(0)}$ y $Q^{(0)}$,

$$\bar{Q}^{(0)} = -\frac{1}{2e^2} \int d^2x \Sigma^\dagger (\gamma^0 B + D) + \frac{i}{\sqrt{2}} \int d^2x \Omega^\dagger \not{D} \phi \quad (4.92)$$

Con esta expresión y $Q^{(0)}$ que puede ser calculada de la ec.(4.89), podemos computar el álgebra supersimétrica que toma la forma (ver apéndice C)

$$\{Q^{(0)}, \bar{Q}^{(0)}\} = -(\not{P}^{(0)} + Z^{(0)}) \quad (4.93)$$

con P_i el 3-momento y Z la carga central. Usando las expresiones explícitas para $\bar{Q}^{(0)}$ y $Q^{(0)}$ obtenidas arriba podemos calcular el anticonmutador de las mismas correspondiente al

lado izquierdo en (4.93). Comparando con el lado derecho en la última ecuación podemos identificar¹⁴

$$\begin{aligned}
P_0^{(0)} &= M^{(0)} \\
&= -\frac{1}{2}\text{tr}(\gamma^0\{Q^{(0)}, \bar{Q}^{(0)}\}) \\
&= \int d^2x \left(\frac{1}{2e^2}B^2 + |D_a\phi|^2 + \frac{1}{2e^2}D^2 \right) \\
&= \int d^2x \left(\frac{1}{2e^2}B^2 + |D_a\phi|^2 + \frac{e^2}{2}(|\phi|^2 - \xi^2)^2 \right)
\end{aligned} \tag{4.95}$$

$$\begin{aligned}
Z^{(0)} &= -\frac{1}{2}\text{tr}(\{Q^{(0)}, \bar{Q}^{(0)}\}) \\
&= \int d^2x \left(\frac{1}{e^2}DB - i\varepsilon_{ab}(D_a\phi)^*D_b\phi \right) \\
&= \int d^2x \left(-B(|\phi|^2 - \xi^2) - i\varepsilon_{ab}(D_a\phi)^*D_b\phi \right) = -\xi^2 \oint_{S_\infty^1} \vec{A} \cdot \vec{dx}
\end{aligned} \tag{4.96}$$

Nos restringimos al caso estático, $a, b = 1, 2$ toman valores sobre índices espaciales, y hemos usado la solución de la ecuación de movimiento para D (4.62), a orden cero en $1/\beta^2$ (4.43). El resultado (4.96) muestra que la carga central del álgebra supersimétrica, a orden Maxwell, es igual a la carga topológica de la solución. De hecho $Z^{(0)}$ es igual al flujo del vector de Bogomol'nyi (4.70).

Consideremos ahora el orden siguiente en la expansión en $1/\beta^2$. En este caso, en lugar de (4.92) tenemos

$$\bar{Q}^{(1)} = \bar{Q}^{(0)} - \frac{1}{4e^2\beta^2} \int d^2x \Sigma^\dagger \left(\frac{1}{2}(3D^2 - B^2) - \gamma^0 BD \right) (\gamma^0 B + D) \tag{4.97}$$

y la solución (4.62) para el campo auxiliar a primer orden en $1/\beta^2$ es

$$D^{(1)} = -e^2(|\phi|^2 - \xi^2) \left(1 + \frac{1}{2\beta^2} (B^2 - e^4(|\phi|^2 - \xi^2)^2) \right) \tag{4.98}$$

Del anticonmutador de las cargas supersimétricas en este caso resulta

$$P_0^{(1)} = \int d^2x \left(\frac{1}{2e^2}B^2 + |D_a\phi|^2 + \frac{1}{2e^2}D^2 + \frac{1}{4\beta^2 e^2}(D^2 - B^2)(B^2 + 3D^2) \right)$$

¹⁴Las reglas de anticonmutación para los campos fermiónicos que se derivan del formalismo canónico son

$$\begin{aligned}
\{\Sigma_\alpha^\dagger(\vec{x}), \Sigma_\beta(\vec{y})\} &= -2e^2\delta_{\alpha\beta}\delta^{(2)}(\vec{x} - \vec{y}) \\
\{\Omega_\alpha^\dagger(\vec{x}), \Omega_\beta(\vec{y})\} &= -2\delta_{\alpha\beta}\delta^{(2)}(\vec{x} - \vec{y})
\end{aligned} \tag{4.94}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^2x \left(\frac{1}{2e^2} B^2 + |D_a \phi|^2 + \frac{e^2}{2} (|\phi|^2 - \xi^2)^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4e^2 \beta^2} (B^2 - e^4 (|\phi|^2 - \xi^2)^2) (B^2 + e^4 (|\phi|^2 - \xi^2)^2) \right) \quad (4.99)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z^{(1)} &= \int d^2x \left(\frac{1}{e^2} DB - i\varepsilon_{ab} (D_a \phi)^* D_b \phi + \frac{1}{e^2 \beta^2} DB (D^2 - B^2) \right) \\
&= \int d^2x \left(-B(\phi^2 - \xi^2) - i\varepsilon_{ab} (D_a \phi)^* D_b \phi \right) \\
&\quad + \frac{1}{2\beta^2} B (|\phi|^2 - \xi^2) (B^2 - e^4 (|\phi|^2 - \xi^2)^2) \quad (4.100)
\end{aligned}$$

Es posible resumar la serie en la expresión de la carga supersimétricas ec.(4.90) obteniéndose como resultado

$$\bar{Q} = -\frac{1}{2e^2} \int d^2x \Sigma^\dagger (1 + f + \gamma^0 g) (\gamma^0 B + D) + \frac{i}{\sqrt{2}} \int d^2x \Omega^\dagger \not{D} \phi \quad (4.101)$$

con

$$f = -1 + \frac{B^2 + D^2}{B^2 - D^2} M - \frac{2BD}{(B^2 - D^2)^2} N \quad (4.102)$$

$$g = \frac{B^2 + D^2}{B^2 - D^2} \left(N - \frac{2BD}{(B^2 - D^2)^2} M \right) \quad (4.103)$$

donde

$$M = \frac{2}{\beta^2} \left(\frac{\beta^2 + B^2}{R} - \beta^2 \right) \quad (4.104)$$

$$N = \frac{2BD}{R} \quad (4.105)$$

$$R = \sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2} (B^2 + D^2)} \quad (4.106)$$

Con esto ya es posible calcular el álgebra supersimétrica

$$\{Q, \bar{Q}\} = -(\not{P} + Z) \quad (4.107)$$

e identificar la energía y la carga central en términos de f y g ,

$$E = \frac{1}{2e^2} \int d^2x \left((B^2 + D^2)(f + 1) + 2gBD \right) + \int d^2x |D_a \phi|^2 \quad (4.108)$$

$$Z = \frac{1}{2e^2} \int d^2x \left((B^2 + D^2)g + 2(f + 1)BD \right) - i \int d^2x \varepsilon_{ab} (D_a \phi)^* D_b \phi \quad (4.109)$$

Ahora, usando la ecuación de movimiento para el campo auxiliar D (ec.(4.62)) podemos ver que el lado derecho en las ecs.(4.108)-(4.109) toma la forma (4.67)

$$E = \frac{\beta^2}{e^2} \sqrt{1 + \frac{e^4}{\beta^2} (|\phi|^2 - \xi^2)^2} \sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2} B^2} - \frac{\beta^2}{e^2} + |D_a \phi|^2 \quad (4.110)$$

$$Z = \int d^2x \left(-B(|\phi|^2 - \xi^2) - i\varepsilon_{ab} (D_a \phi)^* D_b \phi \right) = -\xi^2 \oint_{S_\infty^1} \vec{A} \cdot \vec{dx} = -\xi^2 2\pi n \quad (4.111)$$

Vemos que, finalmente, Z está dada por la misma expresión que en el caso de Maxwell. De hecho, esta coincidencia no es accidental y puede entenderse de la siguiente manera. Al obtener la cota en la energía à la Bogomol'nyi, mirando la teoría puramente bosónica de Born-Infeld-Higgs, escribimos la energía como una suma de cuadrados (4.68). Al efectuar esta manipulación se obtiene en adición a los términos cuadráticos un término de superficie. Este término de superficie es el responsable de la aparición de la carga topológica como cota de la energía. Ahora bien, este término de superficie no es modificado por el hecho de trabajar con el lagrangiano de BI o de Maxwell. Es más, las ecuaciones de Bogomol'nyi, que provienen de pedir que valga la igualdad en (4.69) coinciden en ambas teorías (veremos en la última sección que esto no es casualidad). Visto desde el punto de vista supersimétrico, la cota en la energía se debe a la presencia de la carga central, la cual no depende de la forma del término cinético para el campo de gauge. Hagamos hincapié en que los resultados obtenidos en las ecs.(4.101)-(4.111) corresponden al modelo supersimétrico de Born-Infeld exacto donde no hay aproximaciones en potencias de $1/\beta^2$.

La cota para la energía en el modelo supersimétrico de BIH resulta de una propiedad general de las representaciones supersimétricas con $N \geq 2$. Al estudiar las representaciones del álgebra supersimétrica $N = 2$ para el caso masivo (ver capítulo anterior y [9]) notamos que en presencia de cargas centrales las representaciones satisfacen

$$M \geq |Z| \quad (4.112)$$

Esta es la interpretación supersimétrica de la cota de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield. En particular, la igualdad es válida cuando existe un estado físico que es aniquilado por alguna de las cargas supersimétricas $Q|BPS\rangle = 0$, a este estado particular se lo llama estado BPS¹⁵.

¹⁵Lo que sucede en un background BPS es que el mismo forma un multiplete supersimétrico con menos

Esta es la razón de haber impuesto la anulación de las variaciones supersimétricas de los fermiones de la teoría (ver ec. (4.88),(4.82)-(4.83))¹⁶. La cota Bogomol'nyi en el presente caso coincide, como se señaló anteriormente, con la de la teoría de Maxwell-Higgs,

$$P^0 = E \geq |Z| \quad (4.113)$$

o

$$E \geq \xi^2 2\pi |n| \quad (4.114)$$

donde n es el número de líneas de flujo de campo magnético medidas por la carga central Z que coincide con la carga topológica [23].

4.8 Unicidad de las ecuaciones de Bogomol'nyi

En esta sección discutiremos las ecuaciones de Bogomol'nyi en teorías de gauge generales (que dependen de los dos únicos invariantes fundamentales $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ y $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$) acopladas a campos escalares de Higgs de forma mínima [66]. Analizando su extensión supersimétrica, mostraremos explícitamente porqué la estructura BPS resultante es insensible a la forma particular del lagrangiano de gauge. El lagrangiano de Maxwell, el de Born-Infeld o lagrangianos no polinómicos mas complicados, dan todos lugar a las mismas ecuaciones y cotas de Bogomol'nyi, las cuales están determinadas por el álgebra supersimétrica subyacente.

Con el propósito de poder hallar una cota à la Bogomol'nyi para la teoría de Born-Infeld-Higgs los campos escalares de Higgs fueron acoplados en [18]-[19] de manera de reproducir las relaciones BPS ordinarias (p.ej. Maxwell o Yang-Mills). En las secciones anteriores mostramos que el lagrangiano sugerido en [18] así como las ecuaciones BPS propuestas resultaron unívocamente determinadas en el punto de vista supersimétrico. Como consecuencia de estos resultados, es válido preguntarse por la sensibilidad de las relaciones BPS al tipo

estados que los que uno esperaría para un multiplete masivo. En particular un multiplete 1/2-BPS tiene el mismo número de estados que un multiplete no masivo y es el candidato natural para representar bosones de gauge que sufren ruptura espontánea de simetría[21].

¹⁶ La propiedad (4.112) para el estado ψ_{BPS} es exacta para la teoría que consideremos, mientras la supersimetría no esté rota, no solo clásica sino cuánticamente, ya que fue derivada utilizando teoría de representaciones y álgebra. Este es el fundamento del estudio de dualidades en teorías supersimétricas de campos y de cuerdas.

de dinámica para el campo de gauge. El propósito de la presente sección es responder a tal pregunta.

Una respuesta rápida surge de observar que, en el contexto supersimétrico, como se señaló anteriormente, las ecuaciones de Bogomol'nyi se obtienen imponiendo que se anulen las variaciones supersimétricas del gaugino y del higgsino, y como estas variaciones son las mismas independientemente del tipo de lagrangiano que se esté analizando es de esperar que las relaciones resultantes no dependan de la forma del lagrangiano. Sin embargo, la dinámica asociada con el lagrangiano interviene a través de la ecuación de movimiento para el campo auxiliar D (perteneciente al supermultiplete vectorial) el cual aparece precisamente en la transformación supersimétrica del gaugino. Es entonces a través del campo D que la forma del lagrangiano puede, en principio, alterar la forma general de las relaciones BPS.

Lo que mostraremos en esta sección es que supersimetría junto con la ecuación de movimiento (algebraica) para el campo auxiliar D hace que las relaciones BPS permanezcan inalteradas independientemente de la elección del lagrangiano.

Presentaremos el análisis considerando un modelo abeliano invariante de gauge general en $d = 3$. Nuestros argumentos deberían ser válidos, sin embargo, para otros modelos como por ejemplo generalizaciones del modelo de Georgi-Glashow $SO(3)$ y también en otras dimensiones de espacio-tiempo.

La construcción del lagrangiano general invariante de gauge acoplado a un campo de Higgs la realizaremos nuevamente en $d = 4$. Luego, reduciendo a $d = 3$, obtendremos el modelo supersimétrico $N = 2$.

Como señalamos en secciones anteriores, el supercampo básico para la construcción de una acción invariante de gauge supersimétrica en $d = 4$ es el supercampo (quiral) de curvatura W_α definido a partir del supercampo real V (4.11). Las extensiones supersimétricas de las teorías de Maxwell y Yang-Mills se construyen precisamente a partir de W_α considerando W^2 y su conjugado hermítico \bar{W}^2 (4.12). Ahora bien, dado que deseamos construir lagrangianos mas generales vimos que es necesario considerar los supercampos X e Y definidos en (4.14)-(4.15)¹⁷. Recordemos las componentes puramente bosónicas de los

¹⁷Mediante los supercampos W, X, Y podemos construir los lagrangianos generales supersimetrizables que dependen de F^2 y $F\tilde{F}$ pero no de sus derivadas.

mismos

$$\begin{aligned}
X|_0^{(BOS)} &= -(D^2 - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \\
X|_{\theta\bar{\theta}}^{(BOS)} &= \frac{1}{2}\theta\sigma^\rho\bar{\theta}\partial_\rho(\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \\
X|_{\theta^2\bar{\theta}^2}^{(BOS)} &= \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box(D^2 - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})
\end{aligned} \tag{4.115}$$

y

$$\begin{aligned}
Y|_0^{(BOS)} &= \frac{1}{4}\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
Y|_{\theta\bar{\theta}}^{(BOS)} &= \frac{1}{2}\theta\sigma^\rho\bar{\theta}\partial_\rho(D^2 - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \\
Y|_{\theta^2\bar{\theta}^2}^{(BOS)} &= -\frac{1}{16}\theta^2\bar{\theta}^2\Box(\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu})
\end{aligned} \tag{4.116}$$

El tercer supercampo necesario en la construcción del lagrangiano invariante de gauge mas general, es la combinación $W^2\bar{W}^2$ cuya única componente puramente bosónica se encuentra en la componente mas alta del supercampo

$$W^2\bar{W}^2|_{\theta^2\bar{\theta}^2}^{(BOS)} = \theta^2\bar{\theta}^2\left((D^2 - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + (\frac{1}{2}\tilde{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2\right) \tag{4.117}$$

Remarquemos entonces, que toda la dependencia de (4.115)-(4.117) en la curvatura $F_{\mu\nu}$ y el campo auxiliar D es en la combinación

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\beta^2}(D^2 - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \tag{4.118}$$

y este hecho tendrá consecuencias importantes en nuestra discusión. Aquí, para poder definir la variable adimensional \mathcal{F} hemos introducido el parámetro dimensional β con las mismas dimensiones que $F_{\mu\nu}$ (ver ec.(4.58)). Su interpretación es, como vimos en el capítulo 2, el máximo valor de campo que admite la teoría de Born-Infeld [1]-[2].

Estamos entonces en condiciones de escribir el lagrangiano supersimétrico $N = 1$ e invariante de gauge mas general en términos de X , Y y $W^2\bar{W}^2$ (ver ec.(4.18))

$$\mathcal{L}_{d=4}^{SUSY} = \frac{1}{4e^2} \int (W^2 d^2\theta + \bar{W}^2 d^2\bar{\theta}) + \frac{1}{e^2} \sum_{s,t=0}^{\infty} b_{st}^{(\beta)} \int d^4\theta W^2\bar{W}^2 X^s Y^t \tag{4.119}$$

donde hemos factorizado la constante de acoplamiento e .

El primer término del lado de derecho de la ec.(4.119) depende también de $F_{\mu\nu}$ y D a través de la combinación (4.118), propiedad que ya observamos al construir la extensión supersimétrica de la teoría de Maxwell (ver ecs.(4.12)-(4.13))¹⁸. El segundo término genera una teoría no polinómica. En el caso abeliano que estamos analizando, el lagrangiano bosónico invariante de gauge mas general que se puede construir para el campo de gauge A_μ es una función arbitraria $f(A, B)$ donde $A = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ y $B = F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ (ver apéndice A). Como fue discutido en las secciones anteriores y en [55], la expresión supersimétrica (4.119) permite construir solo extensiones supersimétricas de lagrangianos bosónicos que puedan ser expresados en serie de potencias como

$$\sum_{s,t=0}^{\infty} b_{st}^{(\beta)} (A^2 + B^2) A^s B^t \quad (4.120)$$

Por supuesto, como vimos en la ec.(4.25), la teoría de Born-Infeld puede ser escrita con un lagrangiano de esta forma.

Del lagrangiano (4.119), para una adecuada elección de los coeficientes $b_{st}^{(\beta)}$ (ecs.(4.24)) y por reducción dimensional, obtuvimos la teoría supersimétrica $N = 2$ de Born-Infeld en $d = 3$ (ec.(4.46)). El procedimiento estándar de reducción dimensional (en la coordenada espacial x_3) implica identificar A_3 con un campo escalar N . Al buscar soluciones auto-duales asociadas con vórtices magnéticos estáticos, el campo A_0 (asi como el campo N) pueden ser puestos a cero, entonces podemos identificar la intensidad de campo F con el campo magnético B como

$$\frac{1}{2}F_{ij}F^{ij} = B^2 \quad i, j = 0, 1, 2 \quad (4.121)$$

donde

$$B = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}F_{ab} \quad a, b = 1, 2 \quad (4.122)$$

Una vez realizada la reducción dimensional, obtenemos la versión $d = 3$ del lagrangiano supersimétrico dado en la ec.(4.119). Como ya señalamos anteriormente, mediante este procedimiento la supersimetría se extiende de $N = 1$ a $N = 2$.

¹⁸Por completitud recordemos que la última componente de W^2 (\bar{W}^2) contiene el término $D^2 - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + iF_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ ($D^2 - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - iF_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$) de manera que la suma de integrales en θ y $\bar{\theta}$ da como resultado la conocida extensión supersimétrica de la teoría de Maxwell.

De lo discutido resulta que los términos dependientes solo del campo de gauge en la parte bosónica del lagrangiano supersimétrico $N = 2$ pueden ser escritos en forma compacta como

$$\mathcal{L}_{d=3}^{(BOS)} = \frac{\beta^2}{e^2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathcal{F}^n \quad (4.123)$$

donde los coeficientes c_n son adimensionales y \mathcal{F} (definido en (4.118)) toma ahora la forma

$$\mathcal{F} = \frac{D^2 - B^2}{\beta^2} \quad (4.124)$$

Notemos que la elección $c_1 = \frac{1}{2}$ y $c_n = 0$ para $n \neq 1$ corresponde al lagrangiano de Maxwell mientras que la elección $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{8}$, $c_3 = -\frac{1}{16}$, \dots , da el lagrangiano de Born-Infeld para el campo de gauge.

En lo que concierne al sector del campo de Higgs, en $d = 4$, el acoplamiento entre el campo escalar de Higgs ϕ y el campo de gauge A_μ , y la realización de la simetría en el modo de goldstone (simetría espontáneamente rota), surge del acoplamiento de los supercampos dado por la ec.(4.39). La reducción dimensional no altera los términos que contienen al campo auxiliar D perteneciente al multiplete vectorial real V , de manera que podemos escribir los términos dependientes de D en la parte bosónica del lagrangiano supersimétrico $d = 3$ como

$$\mathcal{L}_D = \frac{\beta^2}{e^2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{D^2 - B^2}{\beta^2} \right)^n + D(|\phi|^2 - \xi^2) \quad (4.125)$$

Podemos ahora obtener la ecuación de movimiento para D de manera de eliminarlo. Escribiendo tal ecuación

$$\frac{1}{e^2} \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \left(\frac{D^2 - B^2}{\beta^2} \right)^{n-1} 2D + (|\phi|^2 - \xi^2) = 0 \quad (4.126)$$

podemos ver, comparando potencias en $1/\beta^2$ que

$$\begin{aligned} D &= -\frac{e^2}{2c_1} (|\phi|^2 - \xi^2) \\ B &= \pm D \end{aligned} \quad (4.127)$$

es la única solución no trivial de la ec.(4.126). Estas dos ecuaciones pueden ser combinadas en una sola que no es mas que la famosa ecuación de Bogomol'nyi para el campo magnético de los vórtices de Nielsen-Olesen

$$B = \pm \frac{e^2}{2c_1} (|\phi|^2 - \xi^2) \quad (4.128)$$

Esto muestra que la ecuación de Bogomol'nyi para el campo de gauge en configuraciones de vórtice (magnéticos) es independiente de la forma particular del lagrangiano elegido para el campo de gauge dado que hemos probado la fórmula (4.128) para el lagrangiano supersimétrico general (4.119)+(4.39).

Analicemos ahora las transformaciones $N = 2$ que dejan invariante la teoría supersimétrica $d = 3$ de Born-Infeld-Higgs. Escribiremos solo las transformaciones que son relevantes para la discusión de las ecuaciones de Bogomol'nyi, esto es las del higgsino y el gaugino (que denotamos como Ω y Σ), en el caso estático y con $A_0 = N = 0$ ecs.(4.78)-(4.81)

$$\delta_Y \Omega = -\sqrt{2}\gamma^a D_a \phi Y = -i\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & (D_1 + iD_2)\phi \\ (D_1 - iD_2)\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix} \quad (4.129)$$

$$\delta_Y \Sigma = -i\left(-\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}F^{ab}\gamma^c + D\right)Y = -i \begin{pmatrix} D - \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}F_{ab} & 0 \\ 0 & D + \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}F_{ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix} \quad (4.130)$$

donde el parámetro de la transformación (Dirac) Y lo hemos descompuesto en componentes.

Como discutimos, pidiendo que se anulen simultáneamente las variaciones supersimétricas asociadas con el higgsino y el gaugino, se obtienen las ecuaciones de Bogomol'nyi. De hecho solo es efectivamente posible anular las variaciones generadas por ϵ_1 o ϵ_2 obteniendo consecuentemente las ecuaciones para un solitón o un antisolitón. Por ejemplo, imponiendo que las generadas por ϵ_2 sean cero, obtenemos de la variación del higgsino la siguiente ecuación de autodualidad

$$\delta_{\epsilon_2} \Omega = 0 \rightarrow D_1 \phi = -iD_2 \phi \quad (4.131)$$

Notemos que esta ley de transformación depende de la manera en que el transporte paralelo es definido en términos del campo de gauge y no de la forma explícita de la acción para el campo de gauge. Es posible entender entonces porqué la ec.(4.131) es completamente independiente de la forma particular de la acción elegida para el campo de gauge, al menos para teorías con acoplamiento de gauge mínimo¹⁹. En lo que respecta a la ecuación que se deriva de la transformación correspondiente al gaugino tenemos,

$$\delta_{\epsilon_2} \Sigma = 0 \rightarrow -\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}F_{ab} = D \quad (4.132)$$

¹⁹Para un análisis de las ecuaciones de Bogomol'nyi en teorías de gauge con acoplamiento no mínimo ver ref.[24].

esta ecuación podría en principio depender del lagrangiano elegido para el campo de gauge a través del término D . Sin embargo, como hemos visto (ec.(4.127)), la solución de la ecuación de movimiento para D toma la misma forma independientemente del lagrangiano elegido para la dinámica del campo de gauge, dado que D siempre aparece como $D^2 - B^2$.

Esta propiedad puede ser verificada también analizando las dos supercargas que pueden ser obtenidas mediante el procedimiento de Noether. Como mostramos anteriormente para el caso de Born-Infeld, las supercargas Q y \bar{Q} siempre pueden ser escritas en la forma

$$\begin{aligned}\bar{Q} &= -\frac{1}{2e^2} \int d^2x \Sigma^\dagger \mathcal{H}[B, D](\gamma^0 B + D) + \frac{i}{\sqrt{2}} \int d^2x \Omega^\dagger \not{D}\phi \\ Q &= -\frac{1}{2e^2} \int d^2x (B + \gamma^0 D) \mathcal{H}[B, D] \Sigma - \frac{i}{\sqrt{2}} \int d^2x \gamma^0 (\not{D}\phi)^\dagger \Omega\end{aligned}\quad (4.133)$$

donde \mathcal{H} es una funcional real de los campos D y B que puede ser calculada orden a orden en $1/\beta^2$. Mas aún, las ecs.(4.133) son válidas no solo al considerar la extensión supersimétrica de la teoría de Born-Infeld ec.(4.101) sino también el lagrangiano genérico (4.119). La forma de \mathcal{H} dependerá del conjunto de coeficientes $b_{st}^{(\beta)}$. Lo que podemos ver facilmente es que vale la siguiente fórmula

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{Maxwell} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n[B, D] \quad (4.134)$$

donde

$$\mathcal{H}_{Maxwell} = 1 \quad (4.135)$$

$$\mathcal{H}_n[B, D]|_{B^2=D^2} = 0 \quad (4.136)$$

Luego, la condición $\bar{Q}|BPS\rangle = 0$ se satisface cuando $(B + \gamma^0 D)\Upsilon = 0$ y $\not{D}\phi\Upsilon = 0$ para algún $\Upsilon \neq 0$, independientemente de la forma que tome la funcional \mathcal{H} . Si eligimos que se anulen las transformaciones supersimétricas generadas por el parámetro ϵ_2 , obtenemos las dos ecuaciones de Bogomol'nyi (4.131),(4.132). Por supuesto que esto era de esperarse ya que las expresiones $(B + \gamma^0 D)\Upsilon$ y $\not{D}\phi\Upsilon$, que aparecen en (4.133), generan las leyes de transformación para el gaugino y el higgsino respectivamente.

En lo que concierne al álgebra de supercargas, al usar la condición de Bogomol'nyi $B = \pm D$, solo la contribución Maxwell de \mathcal{H} sobrevive. Esto demuestra nuevamente que la estructura BPS no es sensible a la forma particular del lagrangiano para el campo de gauge.

4.9 Resumen y Discusión

Estudiando la extensión supersimétrica $N = 2$ del modelo de Born-Infeld-Higgs en $d = 3$ dimensiones, hemos hallado las relaciones de Bogomol'nyi para el sector bosónico. El interés en 3 dimensiones se debe a que en este espacio-tiempo se conocen soluciones de vórtice para las ecuaciones de Bogomol'nyi. Hemos encontrado un hecho notable: las mismas ecuaciones (y luego el mismo conjunto de soluciones) siguen valiendo cuando la dinámica del campo de gauge está determinada por el lagrangiano de Born-Infeld.

Originalmente, las extensiones supersimétricas a la teoría de Born-Infeld fueron construidas usando el formalismo de supercampos [55]-[56] y solo el sector bosónico había sido explícitamente escrito en campos componentes. Dado que una de nuestras metas era derivar las relaciones de Bogomol'nyi partiendo del álgebra supersimétrica $N = 2$, fue necesario explicitar el lagrangiano fermiónico, al menos, a orden cuadrático en campos fermiónicos los cuales dieron ordenes lineales en las corrientes de Noether siendo estas las únicas contribuciones no nulas al álgebra en el sector de background puramente bosónico.

Nuestro análisis muestra que la supersimetría fuerza una particular forma funcional para la acción bosónica en donde el potencial de Higgs entra dentro de la raíz cuadrada de Born-Infeld (ver ec.(4.63) de tal manera que las relaciones de Bogomol'nyi resultantes son las mismas tanto para la teoría de Maxwell como para la de Born-Infeld.

Como era de esperar, la carga central del álgebra supersimétrica $N = 2$ coincide con la carga topológica (el número de unidades de flujo magnético) del modelo mostrando que la cota de Bogomol'nyi no se modifica cuando se analiza la teoría de Born-Infeld. Esto se mostró construyendo el álgebra supersimétrica y derivando la desigualdad de Bogomol'nyi en la forma usual.

Analizamos finalmente el lagrangiano supersimétrico mas general que es posible construir para el campo de gauge, tal que su parte bosónica dependa de los invariantes fundamentales $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ y $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Este lagrangiano general incluye, para una particular elección de coeficientes, el lagrangiano supersimétrico de Born-Infeld, y también una clase infinita de lagrangianos que tienen propagación causal [55]. Hemos mostrado porqué las relaciones de Bogomol'nyi asociadas con el sector bosónico permanecen, para esta dada familia de la-

grangianos, inalteradas a pesar del lagrangiano elegido como dinámica para el campo de gauge: los lagrangianos de Maxwell, de Born-Infeld y lagrangianos no polinómicos mas complicadas tienen la misma estructura BPS.

Finalmente señalemos que se podría realizar un análisis similar para el caso de teorías de gauge no-abelianas. A este respecto existe una ambigüedad en la acción relacionada con la forma de definir la estructura de traza. Para el caso de Born-Infeld fue señalado [46] que la traza simétrica definida en [44] parece quedar singularizada por consideraciones BPS a diferencia de otras definiciones. Esto sugeriría la existencia de una extensión supersimétrica para dicha acción. Este problema será analizado en el próximo capítulo.

Chapter 5

Teoría de Born-Infeld no Abeliana

Usando los invariantes de curvatura naturales como bloques de construcción en el formalismo de supercampos, mostramos que el uso de la traza simétrica en la definición no-abeliana de la acción de Born-Infeld es compatible con supersimetría. Analizamos su relación con la estructura de raíz cuadrada del lagrangiano no abeliano de Born-Infeld en el sector bosónico y discutimos también relaciones BPS en conexión con la construcción supersimétrica.

Estos desarrollos son parte de los resultados originales de esta tesis [88].

5.1 Introducción

Acciones del tipo Dirac-Born-Infeld (DBI) surgen en el estudio de la dinámica de bajas energías de Dp-branas [28]-[30],[31]-[34], [44]-[46],[61],[67]-[68]. En el caso de la teoría de supercuerdas, se debe tratar con la extensión supersimétrica de la acción DBI. Dado que cuando un número \mathcal{N} de D-branas coinciden, existe un aumento de simetría, la acción abeliana de DBI debe ser generalizada al caso no abeliano con grupo de gauge $U(\mathcal{N})$. La explicación de este hecho debida a E. Witten [36] es la siguiente: agregando cargas en los extremos de las cuerdas abiertas (factores de Chan-Paton) generamos un teoría de gauge en el espacio-tiempo. Restringiendo las cuerdas a un hiperplano $(p+1)$ -dimensional (Dp-brana) obtenemos una teoría de gauge en el volumen de mundo de la brana. Si estamos en presencia de \mathcal{N} Dp-branas paralelas y separadas, al calcular los posibles estados de la teoría observamos que existirán \mathcal{N} estados no masivos correspondientes a cuerdas abiertas terminando en la misma brana, que darán origen a una teoría de gauge $U(1)^{\mathcal{N}}$, y $\mathcal{N}^2 - \mathcal{N}$ estados masivos para las cuerdas (orientadas) terminando en distintas branas cuya masa será proporcional a la separación entre branas. Si superponemos las branas en un mismo punto

todos estos estados masivos se vuelven no masivos y la teoría sufre un aumento de simetría $U(1) \rightarrow U(\mathcal{N}) \sim U(1) \times SU(\mathcal{N})$, obteniéndose los \mathcal{N}^2 vectores necesarios para reproducir la adjunta del grupo de gauge $U(\mathcal{N})$.

En la literatura han sido discutidas varias posibilidades para la extensión no abeliana de la acción de DBI [42]-[46],[61]. Básicamente, difieren en la manera en que se define la operación de traza sobre el grupo. En el contexto de cuerdas, la operación de traza simétrica sugerida por Tseytlin [44] parece ser la apropiada. Entre sus ventajas podemos señalar que:

(i) Elimina potencias impares de la curvatura no deseadas, implicando esto que la fuerza de campo F (pudiendo ser grande) debe variar lentamente dado que $F^3 \sim [D, D]F^2$. Con este tipo de aproximación abeliana (implica F 's conmutantes) es posible hacer contacto con la acción efectiva a orden árbol de la teoría de cuerdas abiertas [44]¹.

(ii) Es la única que da origen a una acción que es linealizada por las condiciones BPS y a ecuaciones de movimiento que coinciden con aquellas que resultan de imponer la anulación de las funciones β para la teoría de supercuerdas abiertas en presencia de campos de fondo [45]-[46].

Debemos mencionar, sin embargo, que existen algunos problemas no resueltos en lo que concierne al uso de la traza simétrica en la acción no abeliana de Born-Infeld. En particular, en [62] se señalan discrepancias entre los resultados obtenidos con la teoría no abeliana de Born-Infeld simétrica y el espectro esperado en teorías de branas.

Como fue mencionado en [46], el hecho de que la prescripción de traza simétrica fuera singularizada por ser la que da origen a relaciones BPS debería estar conectado con la posibilidad de supersimetrizar la teoría de BI. Es esta la motivación de este capítulo, donde construimos la versión supersimétrica de la acción no abeliana de BI, discutiendo el tema de la traza en los índices internos del grupo de gauge y las relaciones de Bogomol'nyi que resultan en el sector bosónico.

Nuestro análisis extiende al caso no abeliano los resultados obtenidos en [55] y en el

¹Es importante señalar que la acción efectiva no es única. Precisamente los términos que dependen de derivadas de $F_{\mu\nu}$, en la expansión perturbativa en α' , son ambiguos dado que no están determinados por las amplitudes de scattering on-shell de cuerdas [29]. Esta ambigüedad está relacionada con el hecho de que distintos lagrangianos pueden dar origen a la misma matriz S (teorema de equivalencia). Desde el punto de vista de integral funcional tiene que ver con cambios de variable en la medida de integración que no afectan las condiciones de capa de masa.

capítulo anterior.

5.2 Construcción de la acción

Como vimos en el capítulo anterior, el objeto básico para la construcción de una teoría invariante de gauge supersimétrica es el supercampo vectorial (real) de gauge V que escribimos en la forma

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) = & C + i\theta\chi - i\bar{\theta}\bar{\chi} + \frac{i}{2}\theta^2(M + iN) - \frac{i}{2}\bar{\theta}^2(M - iN) \\ & - \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu + i\theta^2\bar{\theta}(\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\bar{\not{\partial}}\chi) - i\bar{\theta}^2\theta(\lambda + \frac{i}{2}\not{\partial}\bar{\chi}) + \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2(D + \frac{1}{2}\square C) \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde C, M, N, D son campos escalares reales, λ, χ fermiones de Weyl de dos componentes y A_μ el campo de gauge. En el caso no abeliano que nos ocupa, el supercampo V toma valores en el álgebra de Lie del grupo de gauge, luego

$$V = V^a t^a \quad (5.2)$$

de manera que todos los campos componentes llevan un índice interno de grupo²

$$\begin{aligned} V &= (C^a, \xi^a, M^a, N^a, A_\mu^a, \lambda^a, D^a) \\ A_\mu &= A_\mu^a t^a \\ \lambda &= \lambda^a t^a \\ D &= D^a t^a \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde t^a son los generadores hermiticos

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c \quad (5.4)$$

$$\text{tr } t^a t^b = \mathcal{C}\delta^{ab} \quad (5.5)$$

La invarianza de gauge se generaliza en el caso supersimétrico, implementándose en términos de supercampos según la ley de transformación

$$e^{2V} \rightarrow e^{-2i\Phi^\dagger} e^{2V} e^{2i\Phi} \quad (5.6)$$

²En el presente capítulo usaremos letras griegas μ, ν, \dots para los índices espacio-temporales y letras latinas a, b, \dots para referirnos a los índices internos de grupo.

donde $\Phi(\Phi^\dagger)$ es un supercampo quiral (antiquiral) que toma valores en el álgebra de Lie del grupo de gauge.

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \quad (5.7)$$

Explícitamente,

$$\Phi^a(y, \theta) = \phi^a + \theta\psi^a + \theta^2 F^a \quad (5.8)$$

aquí $\phi^a = \phi_1^a + i\phi_2^a$ y F^a son campos escalares complejos y ψ^a es un espinor de Weyl. El supercampo Φ representa la generalización supersimétrica de los parámetros ordinarios de la transformación de gauge.

La invarianza de supergauge (gauge generalizada) nos permite elegir un gauge conveniente llamado de Wess-Zumino, en el cual C, χ, M y N son puestos a cero, quedando un multiplete con el campo de gauge A_μ , el campo fermiónico de Majorana Λ y el campo auxiliar real D (tomando todos valores en el álgebra de Lie del grupo de gauge)³. La transformación (5.6) a primer orden en Φ implica, en el gauge de WZ, para la componente $\theta\bar{\theta}$ correspondiente al campo de gauge A_μ ,

$$\delta^{(WZ)} A_\mu = \nabla_\mu \phi_1 = (\partial_\mu + i[A_\mu, \cdot]) \phi_1 \quad (5.9)$$

donde ϕ_1 es la componente real de ϕ en (5.8). La invarianza de gauge usual para A_μ , entonces, está contenida en (5.6), que generaliza la transformación de simetría a todo el supermultiplete.

A partir de V , se construye el supercampo de curvatura (quiral) W_α ⁴

$$W_\alpha(y, \theta) = \frac{1}{8} \bar{D}^2 (e^{-2V} D_\alpha e^{2V}) \quad (5.10)$$

A diferencia de (5.6), bajo una transformación de supergauge W_α transforma covariantemente,

$$W_\alpha \rightarrow e^{-i2\Phi} W_\alpha e^{i2\Phi} \quad (5.11)$$

³El fijado del gauge de WZ es mas complicado en el caso no abeliano quedando una relación no lineal entre las componentes $(\phi_2, \chi, F) \subset \Phi$ y los campos redundantes $(C, \chi, M, N) \subset V$. Sin embargo el resultado es análogo al del caso abeliano: fijado el gauge de Wess-Zumino tenemos aún la libertad de realizar transformaciones de gauge en A_μ .

⁴Análogamente a lo que sucede en el caso abeliano, en el gauge de WZ la expansión en serie de e^{2V} contiene solo un número finito de términos.

En lo que concierne al conjugado hermítico, \bar{W}_α , el mismo transforma como

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} \rightarrow e^{-i2\Phi^\dagger} \bar{W}_{\dot{\alpha}} e^{i2\Phi^\dagger} \quad (5.12)$$

Escrito en componentes, W_α toma la forma

$$W_\alpha(y, \theta) = i\lambda_\alpha - \theta_\alpha D - \frac{i}{2} (\theta\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_\alpha F_{\mu\nu} - \theta^2 (\nabla\bar{\lambda})_\alpha \quad (5.13)$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu] \quad (5.14)$$

y

$$(\nabla\bar{\lambda})_\alpha = \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \nabla_\mu \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \quad (5.15)$$

La conocida extensión supersimétrica $N = 1$ de la teoría de Yang-Mills se construye a partir de W considerando W^2 y su conjugado hermítico \bar{W}^2 . Conociendo que W^2 toma la forma

$$\begin{aligned} W^2 = & -\lambda^2 - i(\theta\lambda D + D\theta\lambda) + \frac{1}{2}(\theta\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\lambda F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}\theta\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\lambda) + \\ & \theta^2 \left(-i\lambda\nabla\bar{\lambda} - i(\nabla\bar{\lambda})\lambda + D^2 - \frac{1}{2}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\tilde{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \quad (5.17)$$

Escribiendo explícitamente los generadores del grupo de gauge se tiene

$$\begin{aligned} W^2 = & \frac{1}{2}\{t^a, t^b\} \left(-\lambda^a\lambda^b - 2i\theta\lambda^a D^b + \theta\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\lambda^a F_{\mu\nu}^b \right. \\ & \left. - 2i\theta^2\lambda^a(\delta^{bc}\not{\partial} + f^{bcd}A^d)\bar{\lambda}^c + \theta^2 \left(D^a D^b - \frac{1}{2}(F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} + i\tilde{F}_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu}) \right) \right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

donde

$$\{t^a, t^b\} = t^a t^b + t^b t^a \quad (5.19)$$

$$\not{\partial} = \sigma^\mu \partial_\mu \quad (5.20)$$

$$A = \sigma^\mu A_\mu \quad (5.21)$$

De la ec.(5.16) y su análoga para $\bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}$ vemos que la extensión supersimétrica de la teoría de Yang-Mills puede ser escrita en la forma

$$\mathcal{L}_{YM}^{SUSY} = \frac{1}{4g^2\mathcal{C}} \text{tr} \int d^2\theta W^2 + h.c. \quad (5.22)$$

cuya parte puramente bosónica está dada por (cf.(4.13))

$$\mathcal{L}_{YM}^{SUSY}|_{bos} = -\frac{1}{4g^2}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2g^2}D^a D^a \quad (5.23)$$

Fijadas las convenciones estamos listos para extender el tratamiento del capítulo anterior y encontrar el lagrangiano supersimétrico $N = 1$ de Born-Infeld en el caso no abeliano NBI. Este lagrangiano estará básicamente construido en términos de W , \bar{W} y $e^{\pm 2V}$. Es importante mencionar que la operación de traza sobre los índices del grupo de gauge que es necesario realizar para obtener un lagrangiano escalar, podría diferir en principio, de la traza usual “tr” definida en (5.5) y usada en (5.22). Como veremos a continuación este hecho esta relacionado con la prescripción para el ordenamiento de los generadores tanto al definir el determinante en espacio tiempo como al expandir la raíz cuadrada de BI.

En principio se busca definir el lagrangiano de NBI como un determinante en espacio-tiempo. De manera naive, al calcular el determinante para el caso no abeliano en $d = 4$ tenemos [61]^{5,6},

$$-\det(g_{\mu\nu}I + F_{\mu\nu}) = I + \frac{1}{2}F^2 - \frac{1}{4}(\text{“}F^4\text{”} - \frac{1}{2}(F^2)^2) \quad (5.24)$$

En el caso abeliano, el término F^4 en el lado derecho de la ec.(4.3) fue expresado en términos de F^2 y $F\tilde{F}$ (ver ec.(A.26)). Con “ F^4 ” en el caso no abeliano (ec.(5.24)) queremos hacer hincapie en que existe una ambigüedad en el ordenamiento de los factores del término de orden F^4 (ver ecs.(A.34)-(A.36))⁷, ambigüedad que se elimina al determinar una elección para la traza.

Comencemos entonces la búsqueda de la extensión supersimétrica del modelo NBI. Con el objeto de conseguir potencias (pares) de orden mayor a dos de $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ y $\tilde{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ que necesariamente aparecen en un lagrangiano tipo BI, deberemos incluir, como en el capítulo anterior, potencias superiores de W y \bar{W} combinadas de manera de respetar la invarianza de

⁵Dado que $\det(g + F) = \det(g + F^T) = \det(g - F)$ las expansiones tanto en los casos abeliano como no abeliano contienen solo potencias pares de F .

⁶En el presente capítulo ponemos por simplicidad el parámetro dimensional de BI $\beta = 1$.

⁷Aparecerán también ambigüedades al definir $\sqrt{-\det(g + F)}$ relacionadas con el ordenamiento de los factores en todo desarrollo de Taylor de una función de matrices. Así p.ej. al definir una función $f(X, Y)$ mediante su desarrollo de Taylor la misma no queda unívocamente definida si X e Y no conmutan, es necesario dar una prescripción para el ordenamiento de las potencias $X^m Y^n$.

gauge⁸. En el caso abeliano, conseguimos esto combinando $W^2\bar{W}^2$ con potencias adecuadas de D^2W^2 y $\bar{D}^2\bar{W}^2$ ecs.(4.14)-(4.18) y refs.[55]-[56],[65]. Para el caso no abeliano, en vista de las leyes de transformacion (5.6),(5.11),(5.12), la situación es mas sutil. Consideremos entonces los supercampos invariantes de gauge que pueden dar origen a términos de orden cuártico. Hay dos candidatos naturales,

$$F_1 \equiv \int d^2\theta d^2\bar{\theta} W^2 e^{-2V} \bar{W}^2 e^{2V} \quad (5.25)$$

$$F_2 \equiv \int d^2\theta d^2\bar{\theta} W^\alpha e^{-2V} \bar{W}^{\dot{\beta}} e^{2V} W_\alpha e^{-2V} \bar{W}_{\dot{\beta}} e^{2V} \quad (5.26)$$

cuyas componentes puramente bosónicas son (poniendo el campo auxiliar D a cero)

$$\text{tr } F_1|_{bos} = \frac{1}{4} \theta^2 \bar{\theta}^2 \text{tr} \left((F^2)^2 + (F\tilde{F})^2 \right) = \theta^2 \bar{\theta}^2 \mathcal{F}_1 \quad (5.27)$$

$$\text{tr } F_2|_{bos} = \frac{1}{4} \theta^2 \bar{\theta}^2 \text{tr} \left(F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} + F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}^{\rho\sigma} \right) = \theta^2 \bar{\theta}^2 \mathcal{F}_2 \quad (5.28)$$

Podemos ver que una particular combinación de \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 genera los términos de orden cuártico que resultan de la expansión de la raíz cuadrada del lagrangiano NBI, siempre que este sea definido usando la traza simétrica:

$$\text{Str}(t_1, t_2, \dots, t_N) \equiv \frac{1}{N!} \sum_{\pi} \text{tr} \left(t_{\pi(1)} t_{\pi(2)} \dots t_{\pi(N)} \right). \quad (5.29)$$

En efecto, tenemos que

$$\text{Str} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{16} (F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu})^2} \right) \Big|^{4to \text{ ord.}} = \frac{1}{32} \text{Str} \left((F^2)^2 + (F\tilde{F})^2 \right) \quad (5.30)$$

donde en la expresión anterior debemos tener en cuenta que cada F lleva un generador $F = F^a t^a$. Calculando el lado derecho de (5.30) obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Str} \left((F^2)^2 + (F\tilde{F})^2 \right) &= \frac{1}{3} \left\{ 2 \text{tr} \left((F^2)^2 + (F\tilde{F})^2 \right) + \text{tr} \left(F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} + F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}^{\rho\sigma} \right) \right\} \\ &= \frac{4}{3} \{ 2\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 \} \end{aligned} \quad (5.31)$$

lo que nos muestra que

$$\frac{1}{24} \text{tr} \int d^2\theta d^2\bar{\theta} (2F_1 + F_2) \Big|_{bos} = \text{Str} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{16} (F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu})^2} \right) \Big|^{4to \text{ ord.}} \quad (5.32)$$

⁸Análogamente al caso abeliano, existen relaciones algebraicas que permiten reducir expresiones del tipo $F^n = F_{\mu_1}^{\mu_2} F_{\mu_2}^{\mu_3} \dots F_{\mu_n}^{\mu_1}$ a expresiones en terminos de F^2 y $F\tilde{F}$ (ver ec.(A.34)-(A.36)).

Otra razón en favor del uso de la traza simétrica es que resuelve de manera natural las ambigüedades en la definición del lagrangiano de BI como determinante, obteniéndose [29], [46],

$$\text{Str} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{16} (F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu})^2} \right) = \text{Str} \left(1 - \sqrt{\det(g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})} \right) \quad (5.33)$$

donde ambos lados están unívocamente definidos por la prescripción Str.

Es natural entonces tomar como definición de la extensión no abeliana del lagrangiano de Born-Infeld la propuesta de Tseytlin [44] usando “Str”

$$\mathcal{L}_{NBI} = \text{Str} \left(1 - \sqrt{\det(g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})} \right) \quad (5.34)$$

$$= -\frac{1}{4} \text{tr} F^2 + \frac{1}{48} \left[\text{tr}(F^2)^2 + \text{tr}(F \tilde{F})^2 + \frac{1}{2} \text{tr}(F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} + F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}^{\rho\sigma}) \right] + \mathcal{O}(F^6) \quad (5.35)$$

En particular obtenemos de la definición de traza simétrica (5.29) que

$$\text{Str} \left(“F^4” - \frac{1}{2} (F^2)^2 \right) = \frac{1}{4} \text{Str} (F \tilde{F})^2 \quad (5.36)$$

o sea que la prescripción Str es una suerte de aproximación abeliana (cf.(A.26)) pues bajo la operación “Str” los factores F pueden ser tratados como conmutantes. Esta definición para el lagrangiano NBI es en cierto sentido la mínima extensión no abeliana de la teoría abeliana (4.1), que además es consistente con el requerimiento básico para el orden árbol de la teoría de cuerdas, esto es, una sola operación de traza para el producto de los tensores de campo F entendidos como matrices. Sorprendentemente la prescripción “Str” reproduce también exactamente los términos $F^2 + \alpha'^2 F^4$ para la acción efectiva no abeliana de cuerdas abiertas [29],[69]⁹.

En resumen, la ec.(5.32) es uno de los pasos importantes en nuestra derivación de la extensión supersimétrica del lagrangiano NBI, muestra que: al analizar los posibles términos cuárticos de F en la expansión de la raíz cuadrada del determinante de BI, en principio

⁹Mientras que supersimetría $N = 1$ no fija unívocamente la componente bosónica de la acción no lineal abeliana a la forma de BI [55], actualmente se sospecha fuertemente que la imposición de supersimetría $N = 4$ en $d = 4$ (o $N = 1$ en $d = 10$) debería forzarla; ya que en particular, en [70] se muestra que la estructura mas general de los términos F^4 pidiendo supersimetría global en $d = 10$ coincide con (5.36) y mas sugestivamente en la ref.[71] para los términos F^6 .

no cualquier combinación de los mismos es supersimetrizable, debemos elegir combinaciones contenidas en los candidatos naturales F_1 y F_2 . La prescripción de traza simétrica Str corresponde a una particular combinación de trazas normales de F_1 y F_2 , ec.(5.31), luego *la definición de la extensión no abeliana del lagrangiano de Born-Infeld usando Str es supersimetrizable*. Esta combinación fue originalmente propuesta por Tseytlin [29] para la acción de la teoría de BI de manera de hacer contacto con la teoría de bajas energías que resulta de la teoría de supercuerdas. Vale la pena mencionar que el lado derecho de (5.32) se anula para $F = \pm i\tilde{F}$. Esto garantiza, al menos para el orden cuártico que hemos estamos discutiendo hasta aquí, que el lagrangiano supersimétrico se reducirá al de Yang-Mills cuando la cota de Bogomol'nyi (en versión euclídea) sea saturada [14],[40],[62],[66].

El análisis previo fue efectuado en el sector puramente bosónico. Es natural extenderlo considerando la combinación completa de los supercampos $2F_1 + F_2$ ya que la traza de los mismos nuevamente se acomoda en la forma de una traza simétrica

$$\frac{1}{3}(2\text{tr}F_1 + \text{tr}F_2) = \text{Str} \left(W^\alpha, W_\alpha, e^{-2V} \bar{W}_{\dot{\beta}} e^{2V}, e^{-2V} \bar{W}^{\dot{\beta}} e^{2V} \right) \quad (5.37)$$

Para poder construir las potencias superiores de F^2 y $F\tilde{F}$, necesarias para obtener el lagrangiano de BI, definimos, extendiendo el tratamiento del capítulo anterior [65], los supercampos X y Y como,

$$X = \frac{1}{16} \left(\bar{D}^2 \bar{W}_{\dot{\beta}} \bar{W}^{\dot{\beta}} - 2 \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{W}_{\dot{\beta}} \bar{D}^{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\beta}} + \bar{W}_{\dot{\beta}} D^2 \bar{W}^{\dot{\beta}} + e^{-2V} \left(D^2 \mathcal{W}^\beta \mathcal{W}_\beta - 2 D^\alpha \mathcal{W}^\beta D_\alpha \mathcal{W}_\beta + \mathcal{W}^\beta D^2 \mathcal{W}_\beta \right) e^{2V} \right) \quad (5.38)$$

$$Y = \frac{i}{32} \left(\bar{D}^2 \bar{W}_{\dot{\beta}} \bar{W}^{\dot{\beta}} - 2 \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{W}_{\dot{\beta}} \bar{D}^{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\beta}} + \bar{W}_{\dot{\beta}} D^2 \bar{W}^{\dot{\beta}} - e^{-2V} \left(D^2 \mathcal{W}^\beta \mathcal{W}_\beta - 2 D^\alpha \mathcal{W}^\beta D_\alpha \mathcal{W}_\beta + \mathcal{W}^\beta D^2 \mathcal{W}_\beta \right) e^{2V} \right) \quad (5.39)$$

donde hemos definido

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\beta &\equiv e^{2V} W_\beta e^{-2V} \\ \bar{\mathcal{W}}_{\dot{\beta}} &\equiv e^{-2V} \bar{W}_{\dot{\beta}} e^{2V} \end{aligned}$$

Los supercampos (5.38)-(5.39) transforman de manera covariante bajo transformaciones de supergauge

$$X \rightarrow e^{-2i\Phi} X e^{2i\Phi} , \quad Y \rightarrow e^{-2i\Phi} Y e^{2i\Phi} \quad (5.40)$$

y sus componentes para $\theta = 0$ son, como en el caso abeliano, los dos invariantes básicos

$$X|_{\theta=0} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} , \quad Y|_{\theta=0} = \frac{1}{8} \tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (5.41)$$

Inspirados en el resultado (5.37) obtenido de manera de reproducir adecuadamente las potencias cuárticas en F y \tilde{F} , proponemos el siguiente lagrangiano supersimétrico no abeliano como candidato para reproducir la dinámica de BI en su sector bosónico,

$$\mathcal{L}_{NBI}^{(SUSY)} = \mathcal{L}_{YM}^{(SUSY)} + \sum_{n,m} C_{st} \int d^4\theta \text{Str} \left(W^\alpha, W_\alpha, \bar{\mathcal{W}}_{\dot{\beta}}, \bar{\mathcal{W}}^{\dot{\beta}}, X^s, Y^t \right) \quad (5.42)$$

Debemos señalar en este punto que la expresión (5.42) da una familia de lagrangianos correspondiente a la extensión supersimétrica de lagrangianos bosónicos invariante de gauge dependiendo de la fuerza de campo F a través de los invariantes algebraicos $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ y $\tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$. Las combinaciones de F^2 y $F\tilde{F}$ no son arbitrarias sino que están restringidas por supersimetría. La versión abeliana de (5.42) fue ajustada en el capítulo anterior (ver [55]-[56],[65]) mediante una elección apropiada de los coeficientes C_{st} de manera de reproducir el lagrangiano de BI. Lo mismo sucede en el caso no abeliano: para una elección particular de los coeficientes C_{st} obtenemos la teoría no abeliana de Born-Infeld,

$$C_{st} = a_{st}^{(\beta)}|_{\beta=1} \quad (5.43)$$

donde los $a_{st}^{(\beta)}$ fueron definidos en el capítulo anterior por las ecs.(4.24). Con esta elección tenemos como parte bosónica del lagrangiano (5.42),

$$\mathcal{L}_{NBI}^{(SUSY)}|_{bos} = \text{Str} \left(1 - \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})} \right) \quad (5.44)$$

Este es el lagrangiano NBI en la forma propuesta en [29].

Como en el caso no abeliano, existen otras posibles elecciones de coeficientes C_{st} que también dan lugar a una teoría invariante de gauge supersimétrica y causal con dinámica para el campo de gauge no polinómica. En particular, la alternativa de una acción de BI para $SO(N)$, propuesta recientemente en [60], debería corresponder a alguna de estas elecciones.

Hemos construido el lagrangiano supersimétrico $N = 1$ (ec.(5.42)) empleando el formalismo de supercampos, cuya parte bosónica se encuentra expresada en términos de la raíz cuadrada de $\det(g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})$. Empleamos los invariantes de curvatura naturales como bloques de construcción obteniendo un lagrangiano que, en su sector bosónico, depende solo de los invariantes $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ y puede ser expresado en términos de la traza simétrica de un determinante.

Como mencionamos arriba, la estructura de traza de la teoría de la teoría de BI fue fijada en [46] pidiendo que la acción quedase linealizada en las configuraciones BPS (instantones, monopolos, vórtices). En el presente análisis hemos visto que la traza simétrica surge naturalmente en el formalismo de supercampos cuando se construye la raíz cuadrada del lagrangiano de BI. Esta confluencia de resultados no es mas que una manifestación de la conocida conexión entre supersimetría y relaciones BPS. Para terminar el capítulo discutiremos entonces los aspectos BPS del modelo.

5.3 Aspectos BPS

Para fijar ideas nos concentraremos en configuraciones de instantones en $d = 4$. En el gauge de Wess-Zumino, el supermultiplete vectorial $N = 1$ esta formado por (A_μ, Λ, D) , donde Λ es un fermión de Majorana. Con el objeto de analizar relaciones BPS, consideraremos un modelo supersimétrico $N = 2$ que incluye, aparte de estos campos, un multiplete escalar quiral. En analogía con los procedimientos realizados para la construcción del lagrangiano supersimétrico $N = 1$ (5.42), es posible construir el lagrangiano supersimétrico $N = 2$ agregando al multiplete vectorial un multiplete escalar quiral [59]. No detallaremos la construcción aquí sino que consideraremos las transformaciones supersimétricas $N = 2$ relevantes para derivar las relaciones BPS.

El supermultiplete quiral Ψ de supersimetría $N = 2$ puede ser expresado en términos de supermultipletes $N = 1$ como $\Psi = (V, \Phi)$ donde V es un supermultiplete vectorial y Φ un supermultiplete escalar quiral, ambos de $N = 1$. En términos de campos tenemos $(A_\mu, \Sigma, \phi, D, F)$ donde Σ es ahora un fermión de Dirac, $\Sigma = (\lambda_1, \lambda_2)$, ϕ un escalar complejo, $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ y, D y F , campos auxiliares. Las transformaciones supersimétricas del gaugino

toman la forma (llamando $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ al parámetro de la transformación $N = 2$) [9]

$$\delta\lambda_i = (\Gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \gamma_5 D) \epsilon_i + i\varepsilon_{ij} (F + \gamma^\mu \nabla_\mu (\phi_1 + \gamma_5 \phi_2)) \epsilon_j \quad (5.45)$$

donde

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (5.46)$$

Configuraciones de instantones corresponden a $D = F = \phi = 0$ de manera que (5.45) se simplifica a

$$\delta\lambda_i = \Gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \epsilon_i \quad (i = 1, 2) \quad (5.47)$$

Construyendo un fermión de Dirac $\Psi \equiv \lambda_1 + i\lambda_2$, a partir de los fermiones de Majorana λ y usando la propiedad (A.122) obtenemos

$$\delta\Psi = \frac{1}{2} \Gamma^{\mu\nu} (F_{\mu\nu} + i\gamma_5 \tilde{F}_{\mu\nu}) \Upsilon \quad (5.48)$$

donde Υ es el parámetro de supersimetría $N = 2$ (fermión de Dirac). Como vimos en el capítulo anterior, una forma simple de encontrar relaciones BPS es imponer $\delta\Psi = 0$. Denotando $\Upsilon = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$, obtenemos

$$\begin{aligned} (F_{\mu\nu} + i\tilde{F}_{\mu\nu}) \chi &= 0 \\ (F_{\mu\nu} - i\tilde{F}_{\mu\nu}) \bar{\xi} &= 0 \end{aligned} \quad (5.49)$$

En espacio euclídeo, las ecs.(5.49) toman la forma

$$\begin{aligned} (F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}) \chi &= 0 \\ (F_{\mu\nu} - \tilde{F}_{\mu\nu}) \bar{\xi} &= 0 \end{aligned} \quad (5.50)$$

donde χ y ξ son los parámetros fermiónicos de Weyl correspondientes a las dos supersimetrías. Esta condiciones dan origen a las ecuaciones de instantón y anti-instantón

$$F_{\mu\nu} = \pm \tilde{F}_{\mu\nu} \quad (5.51)$$

Claramente se ve que cada una de estas soluciones es invariante frente a la mitad de las supersimetrías.

El hecho de que las ecuaciones de autodualidad de Yang-Mills surjan también cuando la dinámica del campo de gauge está gobernada por el lagrangiano no abeliano de BI fue observado con anterioridad en [40],[62],[68]. En el contexto supersimétrico, esto puede ser entendido siguiendo las conclusiones del capítulo anterior (ver también [66]) donde vimos que las transformaciones supersimétricas del gaugino, junto con las ecuaciones (algebraicas) de movimiento para los campos auxiliares, hacen que las relaciones BPS permanezcan inalteradas independientemente de la elección del lagrangiano para el campo de gauge. Mas aún es posible ver que las cargas supersimétricas $N = 2$ para una teoría no polinómica, obtenidas mediante la construcción de Noether, coinciden *on shell*, con las que resultan en las teorías de Maxwell o Yang-Mills.

5.4 Discusión

En síntesis, usando el formalismo de supercampos, derivamos el lagrangiano supersimétrico no abeliano de Born-Infeld que presenta la estructura BPS esperada, o sea la de la teoría normal de Yang-Mills. En nuestra construcción hemos visto cómo los supercampos naturales a partir de los cuales se obtienen la teorías no abelianas usuales construyen severamente los posibles lagrangianos no abelianos supersimétricos. La derivación mostró la posibilidad de supersimetrizar la prescripción de traza simétrica Str para la extensión no-abeliana del lagrangiano de Born-Infeld reescribiéndola en términos de los bloques naturales en la construcción supersimétrica en términos de supercampos. Debe ser remarcado que el hecho de que el lagrangiano puramente bosónico dependa únicamente de los invariantes básicos F^2 y $F\tilde{F}$ no se debe a la elección de la traza simétrica sino a haber elegido a W^2 y D^2W^2 como bloques de construcción de la teoría supersimétrica. Finalmente, mencionemos que no solo el lagrangiano supersimétrico no abeliano de BI sino toda una familia de lagrangiano no polinómicos se encuentra incluida en nuestro resultado ec.(5.42). Todos ellos son linealizados por configuraciones BPS, que coinciden con las usuales de la teoría de Yang-Mills.

Chapter 6

Diones no-BPS y branas en la teoría de Dirac-Born-Infeld

Construiremos soluciones diónicas no-BPS para la acción de bajas energías de una D3-brana excitando los campos escalares que describen las oscilaciones transversales de la brana. Analizaremos la imagen que emerge de tales configuraciones y, en particular, la respuesta de la solución D3-brana+cuerda a pequeñas perturbaciones.

Estas soluciones y su análisis corresponden a parte de los resultados originales de la tesis [89].

6.1 Introducción

Recientemente han sido discutidas en la literatura ciertas soluciones a la teoría de Dirac-Born-Infeld (DBI) en conexión con la dinámica de Dp-branas [33]-[34],[38]-[41],[46],[68], [71]-[79]. Mas precisamente, la acción de DBI para campos de gauge $(p+1)$ -dimensionales y un cierto número de campos escalares, que describen las fluctuaciones transversales de la brana, admite como soluciones configuraciones estáticas tipo BPS y no-BPS, que pueden ser interpretadas en términos de intersecciones de branas de distinta dimensionalidad, en particular, branas y cuerdas. A pesar de que muchas propiedades estáticas de estas intersecciones provienen de la invarianza frente a supersimetría y de argumentos BPS, las propiedades dinámicas de las soluciones dependen fuertemente de la no linealidad de la acción de DBI. En particular, las condiciones de borde efectivas impuestas a las cuerdas sujetas a las branas deben ser investigadas usando la acción de DBI completa. Mas aún, ciertas configuraciones no-BPS serían relevantes en el estudio de aspectos no perturbativos de las teorías de campos que describen la dinámica de bajas energía de las Dp-branas [80].

En [38]-[39] se construyeron soluciones puramente eléctricas BPS y no-BPS. Asimismo, la propagación de una perturbación normal tanto a la cuerda como a la D3-brana fue investigada en [38] para una solución de fondo de tipo BPS. Los resultados obtenidos mostraron que la imagen de una cuerda sujeta a la brana con condiciones de contorno de Dirichlet emerge naturalmente de la dinámica de DBI. En [73]-[74] se estudiaron perturbaciones polarizadas a lo largo de la brana para un fondo de tipo BPS y se mostró que en este caso se realizaban condiciones de borde de Neumann. De esta manera se reafirmó la imagen de Polchinski de las Dp-branas como hiperplanos en el espacio tiempo donde pueden terminar cuerdas abiertas. Nuevas soluciones no-BPS para la acción de DBI fueron construidas en [40] donde también fueron discutidas soluciones BPS magnéticas. Un estudio detallado de las soluciones BPS diónicas fue presentado en [41].

En este capítulo nos concentraremos en el caso de D3-branas y construiremos explícitamente soluciones diónicas no-BPS cuando el campo de gauge $U(1)$ se acopla a un campo escalar. Analizaremos luego las soluciones en conexión con la geometría de la deformación de la brana por efecto de la tensión de la cuerda- (n, m) que soporta cargas eléctricas y magnéticas [36],[47]. Estudiando la energía de estas configuraciones no-BPS, compararemos los resultados con los obtenidos en los casos BPS y no-BPS puramente eléctricos [38]-[41]. Estudiaremos también pequeñas excitaciones, transversales tanto a la brana como a la cuerda, de manera de examinar si la respuesta de las soluciones no-BPS es consistente con la interpretación en la cual el sistema D3-brana+cuerda descrito corresponde a las condiciones de borde adecuadas (Dirichlet).

El plan del capítulo es el siguiente: en la sección 6.2 construiremos las soluciones no-BPS, con cargas eléctricas y magnéticas, para el modelo DBI de un campo de gauge abeliano acoplado a un campo escalar. Discutiremos las propiedades de las soluciones y las compararemos con las soluciones ya existentes en la literatura. Calcularemos luego la energía renormalizada e interpretaremos las soluciones diónicas no-BPS en términos de cuerdas tirando de las D3-branas. En la sección 6.3 consideraremos pequeñas perturbaciones al fondo no-BPS, normales a la brana y a la cuerda, de manera de examinar las condiciones de borde resultantes. Finalmente discutiremos los resultados en la sección 6.4.

6.2 Soluciones a la acción de Dirac-Born-Infeld

6.2.1 Acción de Dirac-Born-Infeld

Una Dp-brana (o membrana de Dirichlet p-dimensional) moviéndose en \mathbb{M}_{10} describe una superficie $p + 1$ -dimensional. La dinámica que se deduce de la teoría de cuerdas para el regimen de bajas energías de las Dp-branas se expresa en términos de funciones $z^M(x^\mu)$ ($M = 0, \dots, 10$ y $x^\mu = 0, \dots, p$), que representan la posición del volumen de mundo (worldvolume) de la Dp-brana en \mathbb{M}_{10} , y un campo de gauge $A_\nu(x^\mu)$ que vive en el volumen de mundo de la Dp-brana. Las ecuaciones de movimiento para estos campos se obtienen de la acción de Dirac-Born-Infeld [2],[48],[32]

$$S_{DBI}^{(p)} = -T_p \int d^{p+1}x \sqrt{-\det(G_{\mu\nu} + T^{-1}F_{\mu\nu})} \quad (6.1)$$

donde

$$G_{\mu\nu} = \eta_{MN} \partial_\mu z^M \partial_\nu z^N \quad (6.2)$$

es la métrica inducida en el volumen de mundo de la brana por la métrica plana η_{MN} 10-dimensional y

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (6.3)$$

es el tensor de campo electromagnético. La propiedad BPS de la Dp-brana permite deducir de la teoría de cuerdas que [33]

$$T_p = \frac{1}{g_s} (2\pi)^{(1-p)/2} T^{(p+1)/2} \quad (6.4)$$

donde $T = (2\pi\alpha')^{-1}$ es la tensión de la cuerda fundamental y g_s es la constante de acoplamiento para la interacción de cuerdas.

La acción (6.1) es invariante frente a difeomorfismos en el volumen de mundo de la brana. La forma habitual de fijar esta libertad es imponer el gauge estático que consiste en identificar las coordenadas del volumen de mundo con las primeras $p + 1$ coordenadas del espacio-tiempo 10-dimensional

$$z^M = x^\mu, \quad M = 0, 1, \dots, p \quad (6.5)$$

Llamando a las restantes coordenadas transversales X^a

$$z^M = X^a, \quad M = p+1, \dots, 9, \quad a = p+1, \dots, 9 \quad (6.6)$$

tenemos luego que la acción (6.1) en el gauge estático, para el caso $p = 3$ toma la forma¹

$$S_{DBI}^{(3)} = T_3 \int d^4x \left(1 - \sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + T^{-1}F_{\mu\nu} + \partial_\mu X^a \partial_\nu X^a)} \right) \quad (6.7)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski en 3+1 dimensiones, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)^2$, $F_{\mu\nu}$ es el tensor de campo electromagnético en el volumen de mundo (world volume) de la D3-brana, X^a ($a = 4, 5, \dots, 9$) son los campos escalares que describen las fluctuaciones transversales de la brana y

$$T_3 = \frac{1}{2\pi g_s} T^2, \quad T = \frac{1}{2\pi\alpha'} \quad (6.8)$$

La acción (6.7) puede ser obtenida también por reducción dimensional de la acción de Born-Infeld en espacio plano 10-dim (x^M , $M = 0, 1, 2, \dots, 9$), si suponemos que los campos solo dependen de las primeras 1+3 coordenadas x^μ y que las componentes extra $A_4, A_5 \dots A_9$ del campo de gauge representan los campos escalares transversales a la brana [38],[39].

Consideraremos el caso en que excitamos solo un campo escalar, $X^a = \delta^{a9} X$. En este caso la ec.(6.7) toma la forma

$$S_{DBI}^{(3)} = T_3 \int d^4x \left(1 - \left((1 + \partial_\mu X \partial^\mu X) \left(1 + \frac{1}{2T^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) - \frac{1}{16T^4} (\tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 + \frac{1}{T^2} \partial^\mu X F_{\mu\nu} F^{\nu\rho} \partial_\rho X \right)^{1/2} \right) \quad (6.9)$$

Reescribiéndola en términos de los campos \vec{E} y \vec{B} queda (ver apéndice para las convenciones) [38], [39],[74]

$$S_{DBI}^{(3)} = T_3 \int d^4x \left(1 - \left(1 + \frac{1}{T^2} (\vec{B}^2 - \vec{E}^2) - \frac{1}{T^4} (\vec{B} \cdot \vec{E})^2 + (\vec{\nabla} X)^2 - \dot{X}^2 - \frac{1}{T^2} \dot{X}^2 \vec{B}^2 + \frac{1}{T^2} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla} X)^2 - \frac{1}{T^2} (\vec{E} \times \vec{\nabla} X)^2 - \frac{2}{T^2} \dot{X}^2 (\vec{E} \times \vec{B} \cdot \vec{\nabla} X) \right)^{1/2} \right) \quad (6.10)$$

¹Para la discusión de la energía de las soluciones es conveniente normalizar la acción de manera que sea nula para campos nulos.

²En este capítulo cambiamos la convención de la métrica para coincidir con la convención mayormente usada en el contexto de Dp-branas.

6.2.2 Di3n en la teor3a de Born-Infeld

Buscaremos soluciones a la acci3n de Born-Infeld por dos razones: corresponden a un contexto simplificado y son relevantes de por si ³. Las ecuaciones de movimiento que se derivan de la acci3n de Born-Infeld (4.6) son

$$\partial_\mu \frac{F^{\mu\nu} - \frac{1}{4T^2}(F\tilde{F})\tilde{F}^{\mu\nu}}{\sqrt{1 + \frac{1}{2T^2}F^2 - \frac{1}{16T^4}(F\tilde{F})^2}} = 0 \quad (6.11)$$

Estas ecuaciones deben suplementarse con las identidades de Bianchi

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (6.12)$$

El conjunto de ecuaciones (6.11)-(6.12) puede ser reescrito generalizando las ecuaciones de Maxwell como⁴

$$\partial_\mu D^{\mu\nu} = 0 \quad (6.14)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (6.15)$$

si definimos [39],[81]

$$\begin{aligned} D^{\mu\nu} &= -\frac{\delta S_{BI}}{\delta F_{\mu\nu}} \\ &= \frac{F^{\mu\nu} - \frac{1}{4T^2}(F\tilde{F})\tilde{F}^{\mu\nu}}{\sqrt{1 + \frac{1}{2T^2}F^2 - \frac{1}{16T^4}(F\tilde{F})^2}} \end{aligned} \quad (6.16)$$

El l3mite Maxwell corresponde a tomar $T \rightarrow \infty$ en la ecuaci3n (6.11). Asociamos con $D^{\mu\nu}$ los vectores de desplazamiento $D^{\mu\nu} = (\vec{D}, \vec{H})$. La propiedad fundamental de la teor3a de Born-Infeld es la diferencia entre los vectores ponderomotrices (\vec{E}, \vec{B}) y los vectores de desplazamiento (\vec{D}, \vec{H}) .

Veamos c3mo la particular dependencia funcional de $F_{\mu\nu}$ en $D^{\mu\nu}$ genera soluciones de energ3a finita. Dado que estamos interesados en soluciones est3ticas, las ecuaciones que

³De la acci3n (6.9) poniendo el campo escalar $X = 0$ recuperamos la acci3n original de Born-Infeld (4.6).

⁴Las formulaciones de dualidad de la presente teor3a corresponde a escribir las ecuaciones (6.14)-(6.15) en la forma

$$\partial_\mu (D^{\mu\nu} + i\tilde{F}^{\mu\nu}) = 0 \quad (6.13)$$

y considerar rotaciones $(D^{\mu\nu} + i\tilde{F}^{\mu\nu}) \rightarrow e^{i\phi}(D^{\mu\nu} + i\tilde{F}^{\mu\nu})$ [81]-[84].

debemos resolver son

$$\text{div} \frac{\vec{E} + \frac{1}{T^2}(\vec{E} \cdot \vec{B})\vec{B}}{\sqrt{1 + \frac{1}{T^2}(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) - \frac{1}{T^4}(\vec{E} \cdot \vec{B})^2}} = 0 \quad (6.17)$$

$$\text{rot} \frac{\vec{B} - \frac{1}{T^2}(\vec{E} \cdot \vec{B})\vec{E}}{\sqrt{1 + \frac{1}{T^2}(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) - \frac{1}{T^4}(\vec{E} \cdot \vec{B})^2}} = 0 \quad (6.18)$$

que provienen de (6.11) y

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (6.19)$$

$$\text{rot} \vec{E} = 0 \quad (6.20)$$

que provienen de las identidades de Bianchi (6.12). Proponiendo un ansatz radial para el dión y agregando fuentes en las ecuaciones (6.17) y (6.19) obtenemos⁵

$$\vec{E} = \frac{q_e}{4\pi\sqrt{a_0^4 + r^4}} \check{r} \quad (6.21)$$

$$\vec{B} = \frac{q_m}{4\pi r^2} \check{r} \quad (6.22)$$

donde $a_0^4 = (q_e^2 + q_m^2)/(4\pi T)^2$. Los campos de desplazamiento del dión contenidos en $D^{\mu\nu}$ son

$$\vec{D} = \frac{\vec{E} + \frac{1}{T^2}(\vec{E} \cdot \vec{B})\vec{B}}{\sqrt{1 + \frac{1}{T^2}(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) - \frac{1}{T^4}(\vec{E} \cdot \vec{B})^2}} = \frac{q_e}{4\pi r^2} \check{r} \quad (6.23)$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B} - \frac{1}{T^2}(\vec{E} \cdot \vec{B})\vec{E}}{\sqrt{1 + \frac{1}{T^2}(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) - \frac{1}{T^4}(\vec{E} \cdot \vec{B})^2}} = \frac{q_m}{4\pi\sqrt{a_0^4 + r^4}} \check{r} \quad (6.24)$$

El potencial vector $A_\mu = (-A^0, A_r, A_\theta, A_\phi)$ que origina los campos (6.21)-(6.22) es

$$A^0 = \int_r^\infty dr \frac{q_e}{4\pi\sqrt{a_0^4 + r^4}} \quad (6.25)$$

$$A_\phi = \frac{q_m(1 - \cos \theta)}{4\pi r \sin \theta} \quad (6.26)$$

$$A_r = A_\theta = 0 \quad (6.27)$$

Esta solución puede ser obtenida a partir de la solución original de Born-Infeld [2] con fuentes puramente eléctricas mediante una rotación de dualidad [83]. La presente solución (6.25)-(6.27) corresponde a la generalización diónica de dicha solución. La solución (6.21) muestra

⁵Las ecuaciones (6.18) y (6.20) se satisfacen trivialmente para soluciones esféricas. La fuente en la ecuación para \vec{B} es ficticia y se interpreta à la Dirac [85] (cuantización de la carga magnética).

que el campo eléctrico (ponderomotriz) no diverge en $r = 0$. Computando la energía tenemos [81]

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= T^{00} = \vec{D} \cdot \vec{E} - \mathcal{L}_{BI} \\ &= \frac{T^2}{2\pi g_s} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{T^2}(\vec{D}^2 + \vec{B}^2)} + \frac{1}{T^4}(\vec{D} \times \vec{B})^2 - 1 \right)\end{aligned}\quad (6.28)$$

que para la solución (6.21)-(6.22) implica

$$\begin{aligned}E_{dión} &= 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \mathcal{E} \\ &= \frac{4a_0^3 T^2}{3g_s} \int_0^\infty dx \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\end{aligned}\quad (6.29)$$

$$= \frac{\Gamma^2(1/4)}{48\pi^{5/2}g_s} (q_e^2 + q_m^2) \frac{1}{a_0} \quad (6.30)$$

donde hemos usado que

$$\int_0^\infty dx \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{\Gamma^2(1/4)}{4\sqrt{\pi}} \quad (6.31)$$

De la expresión (6.30) vemos que en la teoría de Born-Infeld los diones tienen energía finita y que en el límite Maxwell ($a_0 \rightarrow 0$) la energía de los diones puntuales diverge. En la sección siguiente reinterpretaremos esta divergencia en el contexto de D-branas y cuerdas.

6.2.3 Díon en la teoría de Dirac-Born-Infeld

La existencia de soluciones BPS para la teoría DBI requiere que excitemos al menos un escalar [38],[61] con el objeto de hallar estas soluciones y soluciones mas generales que contemplen las que encontramos en la sección anterior escribiremos las ecuaciones de movimiento para la teoría de DBI con un escalar excitado. Partiendo entonces de la acción (6.10), las ecuaciones para soluciones independientes del tiempo son

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{R} \left(\vec{\nabla} X + \frac{1}{T^2}(\vec{B} \cdot \vec{\nabla} X)\vec{B} + \frac{1}{T^2}\vec{E} \times (\vec{E} \times \vec{\nabla} X) \right) \right) &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{R} \left(\vec{E} + \vec{\nabla} X \times (\vec{E} \times \vec{\nabla} X) + \frac{1}{T^2}(\vec{E} \cdot \vec{B})\vec{B} \right) \right) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{R} \left(\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla} X)\vec{\nabla} X - \frac{1}{T^2}(\vec{E} \cdot \vec{B})\vec{E} \right) \right) &= 0\end{aligned}\quad (6.32)$$

En lo que respecta a R , se la define como

$$R^2 = 1 + (\vec{\nabla} X)^2 + \frac{1}{T^2} \left(\vec{B}^2 - \vec{E}^2 + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla} X)^2 - (\vec{E} \times \vec{\nabla} X)^2 \right)$$

$$-\frac{1}{T^4}(\vec{E} \cdot \vec{B})^2 \quad (6.33)$$

Dado que estamos interesados en soluciones de bión [38]-[39] con cargas eléctrica q_e y magnética q_m , necesariamente \vec{E} y \vec{B} tienen fuentes puntuales. Las soluciones para el caso $X = 0$ fueron halladas en la sección anterior (ecs.(6.25)-(6.27)).

Siguiendo [39]-[40], construimos la solución empleando la simetría residual del espacio 10-dimensional. Efectuando un boost a la solución (6.25)-(6.27) en la dirección x^9 obtenemos

$$\begin{aligned} X &= -\frac{q_e \sqrt{a}}{4\pi T} \int_r^\infty dr \frac{1}{\sqrt{r_0^4 + r^4}} \\ A_0 &= -\frac{q_e}{4\pi} \int_r^\infty dr \frac{1}{\sqrt{r_0^4 + r^4}} \\ A_\varphi &= \frac{q_m}{4\pi r} \frac{(1 - \cos \theta)}{\sin \theta}, \quad A_\theta = A_r = 0 \end{aligned} \quad (6.34)$$

donde

$$r_0^4 = (4\pi T)^{-2}((1-a)q_e^2 + q_m^2) \quad (6.35)$$

y a está relacionada con el cuadrado de la velocidad del boost. Los campos eléctrico y magnético asociados con (6.34) toman la forma

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{q_e}{4\pi \sqrt{r_0^4 + r^4}} \vec{r} \\ \vec{B} &= \frac{q_m}{4\pi r^2} \vec{r} \end{aligned} \quad (6.36)$$

Notemos que dado que el boost es la dirección x^9 , no afecta las direcciones transversales $x^i, i = 1, 2, \dots, 8$. Más aún, dado que estamos considerando soluciones estáticas, A_φ en (6.34) no es afectado y el boost deja intacto campo magnético.

Estas soluciones, otra contribución original de esta tesis, generalizan todas las soluciones conocidas (de una fuente) en el contexto DBI-branas discutidas en la literatura, tanto las BPS como las no-BPS. Poninedo $q_m = 0$ recuperamos, para $a < 1$, los Biones eléctricos, para $a > 1$, las soluciones eléctricas de garganta (throat/catenoid) y, para $a = 1$, las soluciones BPS eléctricas [38],[39],[68],[40]. Las nuevas soluciones que hemos encontrado generalizan las soluciones de Biones y gargantas eléctricas al caso de diones. En lo que respecta al campo magnético \vec{B} , es importante destacar que su valor es independiente de a siendo esto

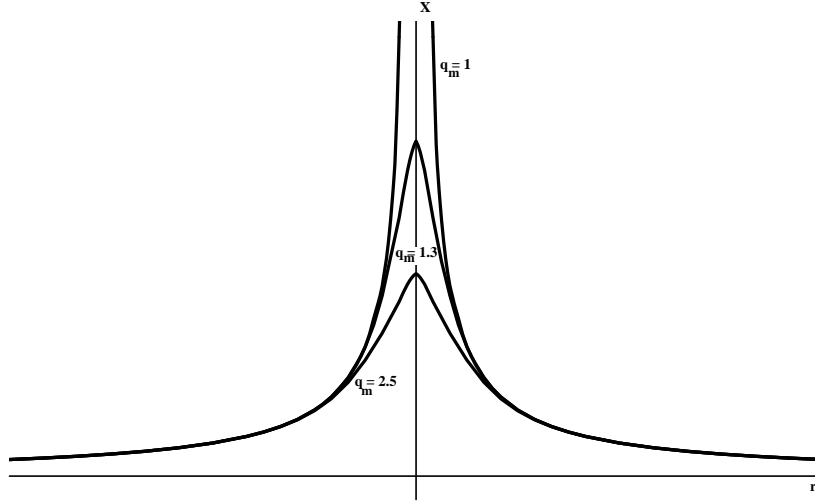


Figure 6.1: Campo escalar X como función de r para un valor de carga eléctrica fija, $q_e = 1$, y para distintos valores de la carga magnética q_m . El límite BPS se obtiene para $q_m^{BPS} = 1$ cuando $q_e = 1$ y $q_s = \sqrt{2}$.

consistente con la afirmación de la cuantización de su carga. Es más, la inducción magnética \vec{H} está dada por

$$\vec{H} \equiv \frac{1}{R} \left(\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla} X) \vec{\nabla} X - \frac{1}{T^2} (\vec{E} \cdot \vec{B}) \vec{E} \right) = \frac{q_m}{4\pi\sqrt{r_0^4 + r^4}} \vec{r} \quad (6.37)$$

Las cargas eléctricas y magnéticas de las soluciones fueron ajustadas de manera que

$$\int_{S_\infty} dS_i E^i = q_e, \quad \int_{S_\infty} dS_i B^i = q_m \quad (6.38)$$

Es conveniente definir la carga del campo escalar q_s como

$$q_s \equiv T \int_{S_\infty} dS_i \partial^i X = \sqrt{a} q_e \quad (6.39)$$

En términos de estas cargas, r_0 en (6.35) toma la forma

$$r_0^4 = (4\pi T)^{-2} (q_e^2 + q_m^2 - q_s^2) \quad (6.40)$$

De (6.34) podemos ver que, para el régimen $q_s^2 \leq q_m^2 + q_e^2$, la solución para el campo escalar toma esencialmente la forma descrita en la Fig. 6.1. Cualitativamente, su comportamiento es similar a la solución puramente eléctrica en la teoría pura BI y también al encontrado en [40] excepto por la existencia de la carga magnética no nula que disminuye la altura del pico.

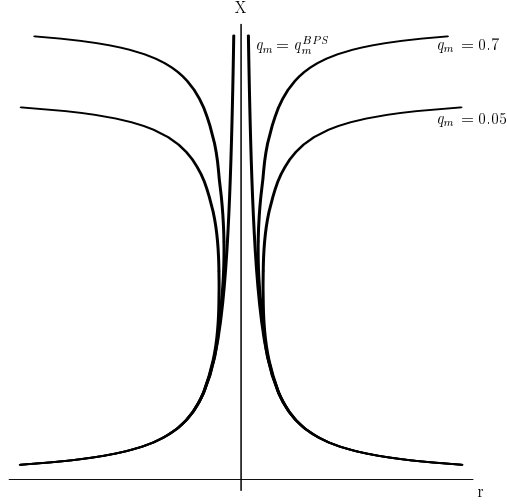


Figure 6.2: Campo escalar X como función de r para un valor de carga eléctrica fija, $q_e = 1$, y para distintos valores de la carga magnética q_m . El límite BPS se obtiene para $q_m^{BPS} = 1$ cuando $q_e = 1$ y $q_s = \sqrt{2}$.

Para $q_s^2 > q_e^2 + q_m^2$ el campo escalar toma la forma que se muestra en la Fig. 6.2 que puede ser interpretada como dos branas asintóticamente planas (de hecho un par brana-antibrana) unidas por una garganta (throat) de radio r_t . Estas branas se encuentran separadas por una distancia $\Delta = 2 |X(r_t)|$ que corresponde a la diferencia entre los dos valores asintóticos de $X(r)$. El radio de la garganta está dado por

$$r_t^4 = -r_0^4 = (4\pi T)^{-2} (q_s^2 - q_e^2 - q_m^2) \quad (6.41)$$

Notemos que el aumento de la carga magnética hace que la garganta adelgace y que Δ aumente. Las soluciones BPS corresponden al caso $r_0 = 0$. Esto es, cuando la carga escalar satisface

$$q_s^{BPS} = \pm \sqrt{q_e^2 + q_m^2} \quad (6.42)$$

Cuando se satisface (6.42), las soluciones de las ecuaciones de Bogomol'nyi

$$\vec{E} = T \cos \xi \vec{\nabla} X \quad (6.43)$$

$$\vec{B} = T \sin \xi \vec{\nabla} X \quad (6.44)$$

son

$$\begin{aligned} X &= -\frac{\sqrt{q_e^2 + q_m^2}}{4\pi T r} \\ \vec{E} &= \frac{q_e}{4\pi r^2} \check{r} \\ \vec{B} &= \frac{q_m}{4\pi r^2} \check{r} \end{aligned} \quad (6.45)$$

con⁶

$$\cos \xi = \frac{q_e}{\sqrt{q_e^2 + q_m^2}} \quad (6.49)$$

Señalemos que $r_0 = 0$ implica que el parámetro de boost $a = 1 + q_m^2/q_e^2 > 1$. En particular, para $q_m = 0$ el boost es al cono de luz. De hecho, $q_m = 0$ corresponde a $\xi = 0$ y entonces (6.34) se reducen a las soluciones BPS eléctricas discutidas en [38],[39]. La elección $\xi = \pi/2$ ($q_e = 0$) corresponde a las soluciones BPS magnéticas discutidas en [39]. Para ξ arbitrario nuestras soluciones BPS coinciden con las analizadas en [41]. Computaremos ahora la energía para las configuraciones no-BPS descritas anteriormente y la interpretaremos en términos de cuerdas unidas a branas.

Consideremos el caso de una sola D3-brana y calculemos la energía almacenada en el volumen de mundo de la brana para la configuración (6.34)-(6.36) cuando $r_0^4 \geq 0$,

$$\begin{aligned} E_{wv} &= \int d^3x T_{00} \\ &= \frac{2}{g_s} \int r^2 dr \left(\frac{q_e^2 + q_m^2}{(4\pi r)^2 \sqrt{r^4 + r_0^4}} + T^2 \left(\frac{r^2}{\sqrt{r^4 + r_0^4}} - 1 \right) \right) \\ &= \frac{\Gamma^2(1/4)}{96\pi^{5/2}g_s} (2(q_e^2 + q_m^2) + q_s^2) \frac{1}{r_0} \end{aligned} \quad (6.50)$$

Dado que el límite BPS se alcanza cuando $r_0 = 0$, vemos que la energía E_{wv} diverge precisamente en el punto que debería corresponder a la cota mínima de la energía. La manera de

⁶En el límite BPS se tiene

$$\vec{D} = \vec{E} \quad (6.46)$$

$$\vec{H} = \vec{B} \quad (6.47)$$

$$e^{i\xi} q_s = q_e + i q_m \quad . \quad (6.48)$$

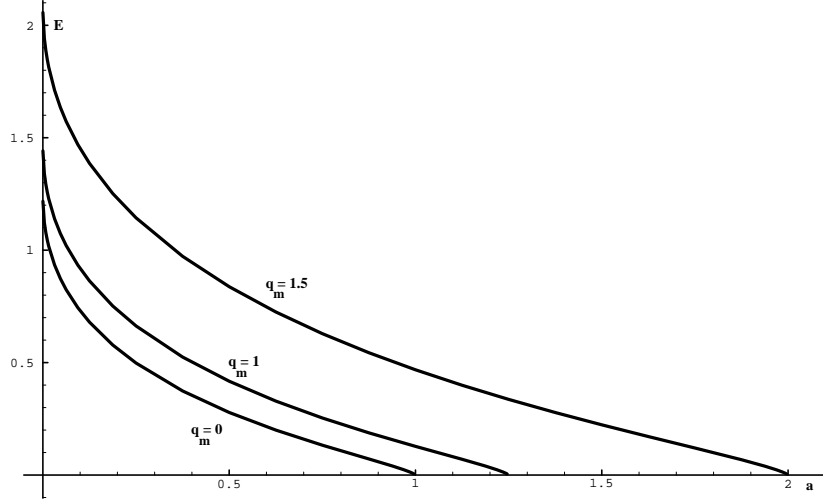


Figure 6.3: Energía de la configuración no-BPS (una D3-brana deformada por una cuerda adherida a ella) como función de $a = q_s^2/q_e^2$ para distintos valores de carga magnética q_m .

evitar este problema es normalizar la energía respecto del valor de Bogomol'nyi. Con este fin definimos

$$\begin{aligned}
 E &\equiv E_{wv} - E_{sub} = E_{wv} - \frac{\Gamma^2(1/4)}{32\pi^{5/2}g_s} |q_s| \sqrt{q_e^2 + q_m^2} \frac{1}{r_0} \\
 &= \frac{\Gamma^2(1/4)}{6\sqrt{\pi}g_s} T^2 \left(2 - \frac{3|q_s|}{|q_s| + \sqrt{q_e^2 + q_m^2}} \right) r_0^3
 \end{aligned} \tag{6.51}$$

Claramente tenemos que $E = 0$ para el caso BPS ($r_0 = 0$). En general, $0 \leq E < \infty$ de manera que la configuración BPS da una cota mínima para la energía. En la Fig. 6.3 se muestra la energía dada por (6.51) como función de la carga escalar. A carga eléctrica fija, podemos ver que, al crecer la carga magnética, la cota de Bogomol'nyi se alcanza para valores mayores de la carga escalar.

Podemos interpretar la substracción realizada en (6.51) de la siguiente forma: usando la ec.(6.34), E_{wv} , dada por la ec.(6.50), puede ser reescrita como

$$E_{wv} = \frac{T}{6\pi g_s} \frac{1}{|q_s|} \left(2(q_e^2 + q_m^2) + q_s^2 \right) |X(0)| \tag{6.52}$$

En lo que concierne al término substraído, el mismo toma la forma

$$E_{sub} = \frac{T}{2\pi g_s} \sqrt{q_e^2 + q_m^2} |X(0)| \tag{6.53}$$

La conexión entre el campo eléctrico del dión y las cuerdas fundamentales (cargadas frente al campo $B_{\mu\nu}$) da origen a la cuantización del flujo del campo eléctrico [37]-[39] de manera que $q_e = 2\pi g_s n$. Para la carga magnética, escribimos $q_m = 2\pi m$. Luego, E_{sub} puede ser reescrita en la forma

$$E_{sub} = T \sqrt{n^2 + \frac{1}{g_s^2} m^2} |X(0)| \quad (6.54)$$

Es posible finalmente reescribir la energía renormalizada E definida en (6.51) como

$$E = E_{wv} - T_{(n,m)} \int_0^{|X(0)|} dX \quad (6.55)$$

$$= E_{wv} + T_{(n,m)} \int_{|X(0)|}^{\infty} dX - T_{(n,m)} \int_0^{\infty} dX \quad (6.56)$$

donde

$$T_{(n,m)} = T \sqrt{n^2 + \frac{1}{g_s^2} m^2} \quad (6.57)$$

La fórmula (6.56) pone de manifiesto la razón de la substracción: el segundo término del lado derecho de (6.56) representa la energía de una cuerda semi-infinita (de tensión $T_{(n,m)}$) extendiéndose desde la punta del pico hasta el infinito. El tercer término subtrae la energía (infinita) de una cuerda que se extiende desde 0 (donde se encuentra la brana plana) hasta el infinito. Estamos computando entonces, la energía de una brana deformada por una cuerda con respecto a la energía de una configuración no-interactuante brana-cuerda (que de hecho resulta ser, como es habitual una configuración BPS)⁷.

En la Fig. 6.4 se representa una secuencia de deformaciones cuando se aumenta la carga escalar hasta alcanzar el valor BPS q_s^{BPS} . Es posible también computar la energía estática almacenada en el volumen de mundo de la solución de tipo garganta ($r_t^2 = -r_0^2 > 0$). Obtenemos

$$E_{wv} = \frac{\Gamma^2(1/4)}{48\sqrt{2}\pi^{5/2}g_s} \left(2(q_e^2 + q_m^2) + q_s^2\right) \frac{1}{r_t} + \frac{4}{3} \frac{T^2}{g_s} r_t^3 \quad (6.58)$$

que también diverge en el límite BPS ($r_t \rightarrow 0$). La substracción adecuada de manera de obtener un resultado finito es

$$E_{sub} = \frac{\Gamma^2(1/4)}{16\sqrt{2}\pi^{5/2}g_s} |q_s| \sqrt{q_e^2 + q_m^2} \frac{1}{r_t} \quad (6.59)$$

⁷En una configuración BPS no existe energía de interacción entre los constituyentes del sistema.

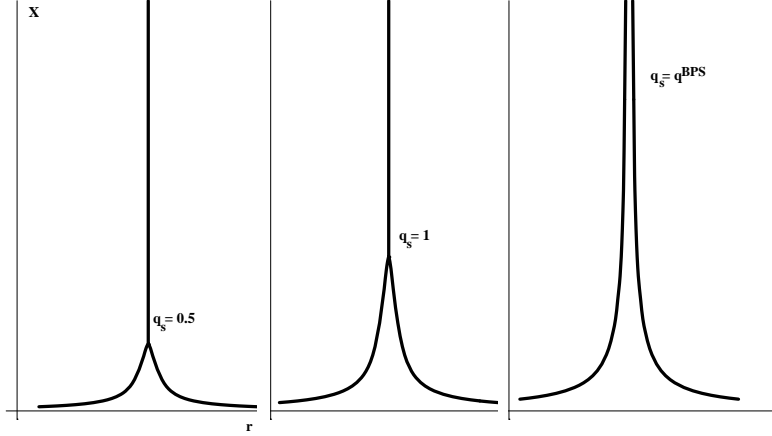


Figure 6.4: Deformación de la brana, debida a la cuerda, como función de r para valores de la carga escalar (en unidades apropiadas) variando entre $q_s = 0.5$ (izq.) y el valor BPS $q_s^{BPS} = \sqrt{q_e^2 + q_m^2} = \sqrt{2}$ (der.).

Tenemos entonces para la garganta

$$E = E_{wv} - E_{sub} = \frac{4}{3} \frac{T^2}{g_s} \left(1 + \frac{\Gamma^2(1/4)}{4\sqrt{2\pi}} \frac{|q_s| - 2\sqrt{q_e^2 + q_m^2}}{|q_s| + \sqrt{q_e^2 + q_m^2}} \right) r_t^3 \quad (6.60)$$

La energía substraída E_{sub} definida por la ec.(6.59) puede ser reescrita como

$$E_{sub} = \frac{T}{2\pi g_s} \sqrt{q_e^2 + q_m^2} 2|X(r_t)| = T_{(n,m)} \Delta \quad (6.61)$$

donde $T_{(n,m)}$ está definida por la ec.(6.57). Luego, la energía finita E en (6.60) corresponde a la diferencia entre la solución de garganta y la configuración no-interactuante brana-cuerda-antibrana (separación infinita). La interpretación de esta última solución en el contexto de cuerdas permite computar el decaimiento por efecto tunel de un par brana-antibrana [38],[72],[74].

Resumiendo, en esta sección hemos construido soluciones a la acción DBI, las hemos reinterpretado en terminos de intersecciones de cuerdas y branas y le hemos dado sentido a las expresiones para la energía de dichas soluciones. En la próxima sección analizaremos pequeñas perturbaciones alrededor de las soluciones halladas.

6.3 Dinámica y condiciones de borde efectivas

Analizaremos en la presente sección, en el espíritu de [38], la respuesta de la teoría a pequeñas fluctuaciones alrededor de las soluciones estáticas no-BPS diónicas que hemos encontrado anteriormente. Tomamos como fondo la solución (6.34) y estudiemos la propagación de una perturbación η del tipo onda- s , polarizada en una dirección perpendicular a la brana y a \check{X}^9 , digamos \check{X}^8 . Partiendo de la acción (6.7) y escribiendo la perturbación η alrededor de la solución estática (6.34), obtenemos desarrollando a segundo orden en la fluctuación

$$-\left(r^4 + \frac{q_e^2 + q_m^2}{(4\pi T)^2}\right)\ddot{\eta}(r, t) + 2r^3\eta'(r, t) + (r^4 + r_0^4)\eta''(r, t) = 0 \quad (6.62)$$

Escribiendo $\eta(r, t) = \eta(r) \exp(i\omega t)$ y definiendo $x = \omega r$ la ecuación estacionaria está dada por

$$\frac{1}{x^2}f(x)(x^2f(x)\eta'(x))' + \frac{\kappa^2 + x^4}{x^4}\eta(x) = 0 \quad (6.63)$$

donde

$$\kappa = \frac{\sqrt{q_e^2 + q_m^2}}{4\pi T}\omega^2 \quad (6.64)$$

y

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + \omega^4 r_0^4}}{x^2} \quad (6.65)$$

En el límite BPS ($r_0 \rightarrow 0 \Rightarrow f(x) \rightarrow 1$) recuperamos los casos estudiados originalmente en [38],[72]. Para estudiar la ec.(6.63) hacemos un cambio de variables de $x \rightarrow \xi$, donde entonces ξ mide la longitud de arco a lo largo de la superficie subtendida por X ⁸

$$\xi(r) = \omega \int_{\sqrt{\kappa}/\omega}^r d\tilde{r} \sqrt{1 + X'^2(\tilde{r})} \quad (6.66)$$

Usando la forma explícita para X dada por (6.34), ξ puede ser escrita en la forma

$$\xi(x) = \int_{\sqrt{\kappa}}^x dy \sqrt{\frac{y^4 + \kappa^2}{y^4 + r_0^4 \omega^4}} \quad (6.67)$$

Definiendo

$$\tilde{\eta}(x) = (x^4 + \kappa^2)^{\frac{1}{4}} \eta(x) \quad (6.68)$$

⁸La elección del límite inferior es para que el pico del potencial esté situado en $\xi = 0 \longleftrightarrow x = \sqrt{\kappa}$

la ec.(6.63) se transforma en una ecuación de Schrödinger unidimensional

$$\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + V(\xi)\right) \tilde{\eta}(\xi) = \tilde{\eta}(\xi) \quad (6.69)$$

con potencial

$$V(\xi) = \frac{5\kappa^2 x^6}{(x^4 + \kappa^2)^3} + \frac{(4\pi T)^2}{q_e^2 + q_m^2} r_0^4 \kappa^2 x^2 \frac{3\kappa^2 - 2x^4}{(\kappa^2 + x^4)^3} \quad (6.70)$$

El primer término en (6.70) es formalmente idéntico al potencial en el límite BPS [38] excepto que la relación entre ξ y x , dada por (6.67) depende de r_0 y, luego, coincide con el caso BPS solo para $r_0 = 0$. Otra diferencia importante con el límite BPS concierne al dominio unidimensional donde el potencial (6.70) está definido: siendo nuestra solución no-BPS, ξ se extiende desde un valor finito (negativo) $\xi(0)$ hasta $+\infty$, dado que la cúspide de la solución tiene una altura finita $X(0)$. Ahora, desde $X^9 = X(0)$ a infinito (esto es, en el intervalo $\xi \in (-\infty, \xi(0))$) la perturbación actúa directamente sobre la acción escalar libre de la cuerda semi-infinita unida a la brana. Luego, en esta región tenemos en lugar de (6.69),

$$-\frac{d^2 \tilde{\eta}(\xi)}{d\xi^2} = \tilde{\eta}(\xi) \quad (6.71)$$

Podemos considerar entonces la ec.(6.69) en el dominio unidimensional completo definiendo

$$V_{eff}(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{if } -\infty < \xi < \xi(0) \\ V(\xi) & \text{if } \xi(0) < \xi < \infty \end{cases} \quad (6.72)$$

El potencial (6.72), correspondiente a una configuración no-BPS, es más complicado que el que se obtiene en el límite BPS, que fue estudiado originalmente en el límite $\kappa \rightarrow 0$ usando aproximaciones de potencial tipo delta [38] y barrera cuadrada [72]. Utilizaremos este segundo método y aproximaremos el potencial por una barrera de potencial, ajustando su altura y ancho de manera que la integral de V y \sqrt{V} coincidan con la del potencial (6.72). Definiendo

$$S = \int \sqrt{V(\xi)} d\xi, \quad U = \sqrt{\kappa} \int V(\xi) d\xi \quad (6.73)$$

Podemos ver que, mediante un apropiado cambio de variables, tanto S como U no dependen de κ . En términos de estas cantidades, encontramos para las amplitudes de reflexión y transmisión

$$\begin{aligned} R &= \frac{\exp(-i\sqrt{\kappa}S^2/U)}{-1 + (2i\sqrt{\kappa}S/U)\coth S} \\ T &= i \left(\frac{2\sqrt{\kappa}S}{U} \operatorname{cosech} S \right) R \end{aligned} \quad (6.74)$$

La ec.(6.74) muestra que obtenemos una reflexión total con cambio de fase que se aproxima a π en el límite de bajas energías ($\kappa \rightarrow 0$). Calculando numéricamente S y U es posible ver también que el coeficiente de reflexión no-BPS $|R(r_0)|$ es ligeramente mayor que el BPS, $|R(r_0)| > |R(0)|$.

Concluimos del análisis anterior, que una perturbación transversal a la cuerda unida a la brana, se refleja en concordancia con los resultados esperados para condiciones de borde de tipo Dirichlet: la amplitud de reflexión R va a -1 en el límite de bajas energías ($\kappa \rightarrow 0$). La imagen que emerge está de acuerdo con la idea de la D3-brana actuando como frontera de las cuerdas abiertas [33],[34].

6.4 Resumen y discusión

En resumen hemos construido soluciones diónicas no-BPS correspondientes a la acción de Dirac-Born-Infeld para un campo de gauge $U(1)$ en el volumen de mundo acoplado a un campo escalar y las hemos analizado en el contexto de dinámica de branas. Si bien nuestras soluciones incluyen las BPS ya discutidas en la literatura, nos hemos concentrado en el sector no-BPS de manera de examinar si esta característica afecta la imagen debida a Polchinski de cuerdas terminando en las branas. Una cantidad importante en el análisis de las soluciones no-BPS es el valor de la carga escalar q_s que puede ser expresado en términos de las cargas eléctrica y magnética como

$$q_s^2 = q_e^2 + q_m^2 - (4\pi T)^2 r_0^4 \quad (6.75)$$

Para $r_0^4 > 0$ nuestras soluciones corresponden a una brana con una punta (spike), para $r_0^4 < 0$ tenemos una solución de brana-antibrana unidas por una garganta (throat). La energía substraida (renormalizada) de estas soluciones diónicas no-BPS puede ser acomodada de manera que resulta natural adoptar la imagen de una brana deformada por una cuerda de tensión $T_{(n,m)} = T\sqrt{n^2 + m^2/g_s^2}$ (m y n son el número de flujos unitarios eléctricos y magnéticos de las solución) unida a ella. Como se mostró gráficamente en la Fig. 6.4, al aumentar la carga escalar hasta el valor BPS q_s^{BPS} , la punta en la brana crece y cuando el valor q_s^{BPS} es superado, la solución se convierte en un par brana-antibrana unidas por una garganta. Finalmente hemos estudiado el efecto de pequeñas perturbaciones transversales

tanto a la cuerda como a la brana sobre la solución no-BPS, mostrando mediante un análisis de dispersión que los resultados corresponden a las condiciones de contorno de Dirichlet esperadas. En particular, la amplitud de reflexión para el fondo no-BPS es ligeramente mayor que la hallada en el caso BPS y tiende a -1 en el límite de bajas energías.

Chapter 7

Conclusiones

En esta tesis hemos estudiado distintos aspectos de modelos de Dirac-Born-Infeld, cuyo interés ha crecido al aparecer como teorías efectivas, a bajas energías, de los modelos de cuerdas que unifican todas las interacciones. Resumiremos en estas conclusiones los principales resultados originales que hemos obtenido en el trabajo de tesis.

En primer lugar, en el capítulo 4 estudiamos la extensión supersimétrica, $N = 2$, del modelo de Born-Infeld-Higgs en 3 dimensiones de espacio-tiempo y sus relaciones de Bogomol'nyi. En las extensiones supersimétricas de la teoría de Born-Infeld que habían sido discutidas previamente [55]-[56], solo el sector bosónico había sido construido explícitamente. Para derivar las relaciones de Bogomol'nyi a partir del álgebra de supersimetría $N = 2$, es necesario conocer también el lagrangiano puramente fermiónico y de interacción (al menos a orden cuadrático) pues origina términos en las corrientes de Noether que de hecho constituyen las únicas contribuciones no nulas al álgebra de supersimetría cuando ésta se escribe en el sector puramente bosónico.

Llevamos a cabo entonces tal construcción y a partir del análisis del álgebra, pudimos mostrar que la supersimetría fuerza una forma funcional particular para la acción bosónica, en la que el potencial de Higgs aparece dentro de la raíz cuadrada de Born-Infeld (ver ec.(4.63)). De esta manera la forma funcional del potencial de ruptura de simetría de gauge, que había sido seleccionado en [18] con el fin de tener las ecuaciones de Bogomol'nyi usuales, resultó unívocamente determinada por la extensión supersimétrica del modelo. Como era de esperar, encontramos que la carga central del álgebra de supersimetría $N = 2$ coincide con

la carga topológica (el número de unidades de flujo magnético) del modelo, lo que muestra que la cota de Bogomol’nyi no se modifica cuando la acción de Born-Infeld reemplaza a la de Maxwell.

Trabajamos en 3 dimensiones de espacio-tiempo porque en este caso se conocen soluciones de vórtice del modelo de Maxwell-Higgs que satisfacen ecuaciones de Bogomol’nyi. Como hecho notable, encontramos que las mismas ecuaciones (y luego, el mismo conjunto de soluciones) son válidas cuando la dinámica del campo de gauge está determinada por el lagrangiano de Born-Infeld. Esto nos indujo a analizar el conjunto de lagrangianos supersimétricos con un sector bosónico dependiente de los invariantes fundamentales $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ y $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Este conjunto incluye, para una particular elección de coeficientes, el lagrangiano supersimétrico de Born-Infeld, y también una clase infinita de lagrangianos que tienen propagación causal [55]. Mostramos en este contexto el porqué las relaciones de Bogomol’nyi son insensibles a la elección del lagrangiano para el campo de gauge: lagrangianos de Maxwell, de Born-Infeld y no polinómicos mas complicados tienen la misma estructura BPS, siempre que el acoplamiento con el campo de Higgs sea mínimo.

En la definición de la acción de Born-Infeld no abeliana existe una ambigüedad relacionada con la forma de definir la estructura de traza en los índices de grupo. Motivados por un trabajo previo [46] donde se señaló que una cierta elección de traza (simétrica), propuesta en [44], permite la existencia de una cota de Bogomol’nyi, y conocida la relación entre cotas y supersimetría, decidimos estudiar la extensión supersimétrica de dicha acción no abeliana. Presentamos nuestros resultados en el capítulo 5.

En particular, mostramos que la acción definida en base a la prescripción de traza simétrica es compatible con supersimetría. Para ello construimos el lagrangiano supersimétrico $N = 1$ en $d = 4$ (ec.(5.42)), empleando los supercampos de curvatura usuales como bloques básicos. Obtuvimos un lagrangiano que, en su sector bosónico, depende solo de los invariantes $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$. La prescripción “Str” permitió definir la extensión no abeliana de la teoría de Born-Infeld como una raíz cuadrada del determinante de $g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}$, eliminando las ambigüedades en el ordenamiento del determinante, como así también del desarrollo en serie de la raíz cuadrada. El método de construcción dió origen a una familia

de lagrangianos que, similarmente al caso abeliano, resultan estar acotados por una cantidad topológica, saturando la cota (en espacio plano de Minkowski) cuando $F_{\mu\nu} = \pm i\tilde{F}_{\mu\nu}$. Mostramos también cómo estas ecuaciones BPS resultan del análisis de las variaciones supersimétricas.

Como mencionamos arriba, la estructura de traza de la teoría de BI fue fijada en [46] requiriendo que la acción quedase linealizada en las configuraciones BPS (instantones, monopolos, vórtices). En nuestro análisis, pudimos ver que la traza simétrica surge naturalmente en el formalismo de supercampos, cuando se construye la raíz cuadrada del lagrangiano de BI. Esta confluencia de resultados no es mas que una manifestación de la conocida conexión entre supersimetría y relaciones de Bogomol'nyi.

En el capítulo 6 estudiamos la acción de Dirac-Born-Infeld en $d = 4$, en relación a la dinámica de bajas energías de una D3-brana, en la teoría de supercuerdas tipo IIB. Extendimos las soluciones de las ecuaciones de movimiento conocidas, eléctricas, BPS y no-BPS, al caso magnético. Así, obtuvimos soluciones diónicas no-BPS de las ecuaciones de movimiento de Dirac-Born-Infeld para un campo de gauge U(1) en el volumen de mundo, acoplado a un campo escalar. Analizando luego estas soluciones en el contexto de dinámica de branas. Nos concentramos en el sector no-BPS de las soluciones, de manera de examinar si esta característica afecta la imagen de Polchinski [33] en la que las cuerdas terminan en branas. La carga del campo escalar q_s se expresa, para las soluciones de branas, en términos de las cargas eléctrica y magnética como

$$q_s^2 = q_e^2 + q_m^2 - (4\pi T)^2 r_0^4 \quad (7.1)$$

Para $r_0^4 > 0$ nuestras soluciones corresponden a una brana con una punta, para $r_0^4 < 0$ se tiene una solución de brana-antibrana unidas por una garganta. La energía substraída (renormalizada) de estas soluciones diónicas no-BPS puede ser acomodada de manera que resulta natural interpretar a la solución como una brana deformada por una cuerda de tensión $T_{(n,m)} = T\sqrt{n^2 + m^2/g_s^2}$ (m y n son el número de flujos unitarios eléctricos y magnéticos de la solución) unida a ella. Este resultado es esperable en base a la simetría S de la teoría de

supercuerdas IIB. Como se mostró gráficamente en la Fig. 6.4, al aumentar la carga escalar hasta el valor q_s^{BPS} , la punta en la brana crece y cuando este valor es superado, la solución se convierte en un par brana-antibrana unidas por una garganta. De esta manera, muestras soluciones realizan los dos conjuntos de soluciones discutidos en [39]. Finalmente estudiado el efecto de pequeñas perturbaciones transversales a la cuerda y a la brana. Mostramos, mediante un análisis de dispersión, que los resultados son consistentes con las condiciones de contorno de Dirichlet esperadas. En particular, vimos que la amplitud de reflexión para el fondo no-BPS es ligeramente mayor que la hallada en el caso BPS y tiende a -1 en el límite de bajas energías.

Appendix A

Convenciones

Métrica e Índices

- Usamos índices griegos $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$, para las coordenadas del espacio-tiempo x^μ .
- Los índices latinos i, j, k denotan coordenadas espaciales $x^i = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$. Alternativamente usamos $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ para las componentes contravariantes.
- La signatura de la métrica es $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$ (capítulos 3 y 4) y $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)$ (capítulo 5).
- El tensor de Levi-Civita $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ es totalmente antisimétrico con $\varepsilon_{0123} = 1$ ($\varepsilon^{0123} = -1$).
- El tensor totalmente antisimétrico en dimensiones espaciales se define con $\varepsilon^{123} = 1$ sin distinguir entre índices covariantes o contravariantes.

Campo electromagnético

- i) Métrica $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$

A partir de la 1-forma $A_\mu = (\phi, -\vec{A})$ se define

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A} \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (\text{A.2})$$

que se expresa en notación covariante como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (\text{A.3})$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

dando las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} E^i &= E_i = F_{0i} \\ B^i &= B_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} F_{0i} &= E_i \\ F_{ij} &= -\varepsilon_{ijk}B_k \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

- ii) Métrica $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)$

A partir de la 1-forma $A_\mu = (-\phi, \vec{A})$ se define

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A} \quad (\text{A.7})$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (\text{A.8})$$

que se expresa en notación covariante como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (\text{A.9})$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

dando las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} E^i &= E_i = F_{i0} \\ B^i &= B_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} F_{i0} &= E_i \\ F_{ij} &= \varepsilon_{ijk}B_k \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

- El dual de Hodge se define como

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \quad (\text{A.13})$$

que corresponde a hacer

$$\begin{aligned} \vec{E} &\rightarrow -\vec{B} \\ \vec{B} &\rightarrow \vec{E} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

La expresión inversa a (A.13) es

$$F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{F}_{\rho\sigma} \quad (\text{A.15})$$

- Identidades

$$F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) \quad (\text{A.16})$$

$$F\tilde{F} = F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = 4\vec{E} \cdot \vec{B} \quad (\text{A.17})$$

$$\tilde{\tilde{F}} = -F \quad (\text{A.18})$$

$$\tilde{F}^2 = \tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -F^2 \quad (\text{A.19})$$

$$\tilde{F}_\mu{}^\rho\tilde{F}_\rho{}^\nu = F_\mu{}^\rho F_\rho{}^\nu + \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu F^2 \quad (\text{A.20})$$

$$F_\mu{}^\rho\tilde{F}_\rho{}^\nu = -\frac{1}{4}\delta_\mu^\nu F\tilde{F} \quad (\text{A.21})$$

Las identidades anteriores se dedujeron usando las siguientes propiedades del tensor de Levi-Civita

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\omega\tau\nu} &= -(\delta_\omega^\nu\delta_\tau^\rho\delta_\nu^\sigma - \delta_\omega^\nu\delta_\nu^\rho\delta_\tau^\sigma + \delta_\tau^\nu\delta_\nu^\rho\delta_\omega^\sigma - \delta_\tau^\nu\delta_\omega^\rho\delta_\nu^\sigma + \delta_\nu^\nu\delta_\omega^\rho\delta_\tau^\sigma - \delta_\nu^\nu\delta_\tau^\rho\delta_\omega^\sigma) \\ &= -\delta_{\omega\tau}^{\rho\sigma} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\omega\tau} = -2(\delta_\omega^\rho\delta_\tau^\sigma - \delta_\tau^\rho\delta_\omega^\sigma) = -2\delta_{\omega\tau}^{\rho\sigma} \quad (\text{A.23})$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\omega} = -3!\delta_\omega^\sigma \quad (\text{A.24})$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -4! \quad (\text{A.25})$$

Usando las identidades (A.20) y (A.21) tenemos que

$$\begin{aligned} F^4 &= F_\mu{}^\nu F_\nu{}^\rho F_\rho{}^\sigma F_\sigma{}^\mu \\ &= \tilde{F}_\mu{}^\nu \tilde{F}_\nu{}^\rho F_\rho{}^\sigma F_\sigma{}^\mu - \frac{1}{2}(F^2)\delta_\mu^\rho F_\rho{}^\sigma F_\sigma{}^\mu \\ &= -\frac{1}{4}\tilde{F}_\mu{}^\nu\delta_\nu^\sigma(F\tilde{F})F_\sigma{}^\mu + \frac{1}{2}(F^2)^2 \\ &= \frac{1}{4}(F\tilde{F})^2 + \frac{1}{2}(F^2)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

que permite reescribir el lagrangiano de Born-Infeld (4.1) en términos de F^2 y $F\tilde{F}$. Usando la antisimetría de $F_{\mu\nu}$ podemos mostrar que toda contracción de un número impar de F' s es cero

$$F^{2n+1} = F_{\mu_1}^{\mu_2} F_{\mu_2}^{\mu_3} \dots F_{\mu_{2n+1}}^{\mu_1} = 0. \quad (\text{A.27})$$

El resultado (A.26) se generaliza para un número par arbitrario de F' s usando la siguiente relación

$$\begin{aligned} F^{2n} &= F_{\mu_1}^{\mu_2} F_{\mu_2}^{\mu_3} \dots F_{\mu_{2n}}^{\mu_1} \\ &= -\frac{1}{2} F^2 F^{2n-2} + \frac{1}{16} (F\tilde{F})^2 F^{2n-4} \quad (n \geq 3) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Luego cualquier contracción de F' s se puede expresar en términos de los invariantes fundamentales F^2 y $F\tilde{F}$. Para las primeras potencias tenemos

$$F^6 = -\frac{1}{2^2} (F^2)^3 - \frac{3}{4^2} F^2 (F\tilde{F})^2 \quad (\text{A.29})$$

$$F^8 = \frac{1}{2^3} (F^2)^4 + \frac{4}{2 \cdot 4^2} (F^2)^2 (F\tilde{F})^2 + \frac{1}{4^3} (F\tilde{F})^4 \quad (\text{A.30})$$

- Caso no abeliano: En este caso $F = F^a t^a$ y las identidades (A.16)-(A.21) son reemplazadas por

$$\tilde{F}\tilde{F} = F\tilde{F} = -F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\text{A.31})$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\nu\rho} = F^{\rho\gamma} F_{\gamma\mu} + \frac{1}{2} \delta_\mu^\rho F^2 \quad (\text{A.32})$$

$$F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\nu\rho} = -\tilde{F}^{\rho\gamma} F_{\gamma\mu} - \frac{1}{2} \delta_\mu^\rho \tilde{F} F \quad (\text{A.33})$$

obteniéndose en particular

$$F^4 = F_\mu^\nu F_\nu^\rho F_\rho^\sigma F_\sigma^\mu = \frac{1}{4} \left((F^2)^2 + F_{\mu\nu} F^2 F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}^{\rho\sigma} \right) \quad (\text{A.34})$$

$$F_{\mu\nu} F^{\nu\rho} F^{\mu\sigma} F_{\sigma\rho} = \frac{1}{4} \left((F^2)^2 + F_{\mu\nu} F\tilde{F} \tilde{F}^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} \right) \quad (\text{A.35})$$

$$F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\mu\sigma} F^{\rho\nu} = \frac{1}{4} \left((F\tilde{F})^2 + F_{\mu\nu} F^2 F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} \right) \quad (\text{A.36})$$

que muestra que las potencias de orden F^4 en el desarrollo del determinante de BI se factorizan en términos de F^2 y $F\tilde{F}$, independientemente de la elección para la traza

en los índices internos de grupo. Es de esperar que esta propiedad valga también para las potencias de orden superior.

Espinores

- Seguimos en casi su totalidad la notación de Lykken [11] salvo ligeras modificaciones. Para un estudio detallado de las representaciones espinoriales del grupo de Lorentz ver [86], también son discutidas en [6], [10],[87].
- Usamos índices griegos sin punto $\alpha, \beta, \dots = 1, 2$ para denotar las componentes de la representación $(\frac{1}{2}, 0)$ del grupo de Lorentz $\psi^{(L)} = \psi_\alpha$.
- Usamos índices griegos con punto $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dots = 1, 2$ para denotar las componentes de la representación $(0, \frac{1}{2})$ del grupo de Lorentz $\psi^{(R)} = \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$ ¹.
- Las letras mayúsculas griegas $\Lambda, \Upsilon, \Sigma, \dots$ las usamos para denotar espinores de cuatro componentes, en general fermiones de Majorana en $d = 4$.
- Las minúsculas griegas $\lambda, \epsilon, \psi, \dots$ las usamos en $d = 4$ para denotar fermiones de Weyl de dos componentes.
- La métrica en el espacio de espinores de Weyl es ²

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.37})$$

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma^2 \quad (\text{A.38})$$

donde

$$\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma \quad (\text{A.39})$$

$$\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\gamma}} \quad (\text{A.40})$$

¹La notación es redundante pues un espinor barrado es sinónimo de que transforma con índices punteados, pero mantenemos la convención usual ya que ayuda a evitar confusiones.

²La notación de Van der Waerden de índices arriba y abajo, punteados y sin puntear es para tener en cuenta la propiedad $\psi^{(L)} \in (\frac{1}{2}, 0) \Rightarrow i\sigma^2\psi^* \in (0, \frac{1}{2})$ y que $\chi^{(L)}i\sigma^2\psi^{(L)}$ es un escalar bajo transformaciones de Lorentz ver [10],[87].

- La convención para subir y bajar índices es

$$\psi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \psi_\beta \quad \psi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \psi^\beta \quad (\text{A.41})$$

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\psi}_{\dot{\beta}} \quad \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}} \quad (\text{A.42})$$

- Producto escalar para espinores de Weyl

$$\psi\chi = \psi^\alpha \chi_\alpha = -\psi_\alpha \chi^\alpha = \chi^\alpha \psi_\alpha = \chi\psi \quad (\text{A.43})$$

$$\bar{\psi}\bar{\chi} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}\bar{\psi} \quad (\text{A.44})$$

En particular denotaremos

$$\psi^2 = \psi^\alpha \psi_\alpha \quad (\text{A.45})$$

$$\bar{\psi}^2 = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \quad (\text{A.46})$$

- El adjunto de un espinor de Weyl se define como

$$(\psi_\alpha)^\dagger \equiv \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \quad (\bar{\psi}^{\dot{\alpha}})^\dagger \equiv \psi^\alpha \quad (\text{A.47})$$

La operación de conjugación \dagger intercambia el orden de los fermiones en un producto escalar sin tener en cuenta el caracter grassmann de los mismos y las definiciones (A.44)-(A.44) fueron hechas para que

$$(\chi\psi)^\dagger = (\chi^\alpha \psi_\alpha)^\dagger = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}\bar{\psi} \quad (\text{A.48})$$

Dado que las σ^μ son hermiticas tenemos

$$(\chi\sigma^\mu\bar{\psi})^\dagger = \psi\sigma^\mu\bar{\chi} \quad (\text{A.49})$$

- Las matrices de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.50})$$

satisfacen

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk} \sigma^k \quad (\text{A.51})$$

$$\sigma^i \sigma^j \sigma^k = \delta^{ij} \sigma^k - \delta^{ik} \sigma^j + \delta^{jk} \sigma^i + i \varepsilon^{ijk} \sigma^k \quad (\text{A.52})$$

$$\text{tr } \sigma^i \sigma^j = 2 \delta^{ij} \quad (\text{A.53})$$

$$[\sigma^i, \sigma^j] = 2i \varepsilon^{ijk} \sigma^k \quad (\text{A.54})$$

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2 \delta^{ij} I_2 \quad (\text{A.55})$$

donde I_2 denota la matriz identidad 2×2 .

- A partir de ellas definimos las matrices hermíticas

$$\sigma^\mu = (I_2, \vec{\sigma}) \quad (\text{A.56})$$

$$\bar{\sigma}^\mu = (I_2, -\vec{\sigma}) \quad (\text{A.57})$$

también usaremos $\sigma^0 \equiv \bar{\sigma}^0 \equiv I_2$.

$$\sigma^\mu \text{ tiene \u00cdndices sin punto - punto : } \sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}$$

$$\bar{\sigma}^\mu \text{ tiene \u00cdndices punto - sin punto : } \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}$$

Podemos construir vectores de Lorentz haciendo

$$\chi \sigma^\mu \bar{\psi} = \chi^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \quad (\text{A.58})$$

$$\bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \psi = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \psi_\alpha \quad (\text{A.59})$$

Tenemos las siguientes relaciones de completitud

$$\text{tr } \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu = 2 g^{\mu\nu} \quad (\text{A.60})$$

$$\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} \sigma_\mu^{\dot{\gamma}\delta} = 2 \delta_\alpha^\delta \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\gamma}} \quad (\text{A.61})$$

Las matrices σ^μ y $\bar{\sigma}^\mu$ se encuentran relacionadas

$$\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon^{\beta\alpha} \sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} = \sigma^{\mu\beta\dot{\alpha}} \quad (\text{A.62})$$

$$\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} = \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} = \bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\alpha} \quad (\text{A.63})$$

y satisfacen las identidades

$$(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)_\alpha^\beta = 2 g^{\mu\nu} \delta_\alpha^\beta \quad (\text{A.64})$$

$$(\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} = 2 g^{\mu\nu} \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \quad (\text{A.65})$$

$$\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \sigma^\rho = (g^{\mu\nu} g^{\rho\omega} - g^{\mu\rho} g^{\nu\omega} + g^{\nu\rho} g^{\mu\omega}) \sigma_\omega - i\varepsilon^{\mu\nu\rho\omega} \sigma_\omega \quad (\text{A.66})$$

$$\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\sigma}^\rho = (g^{\mu\nu} g^{\rho\omega} - g^{\mu\rho} g^{\nu\omega} + g^{\nu\rho} g^{\mu\omega}) \bar{\sigma}_\omega + i\varepsilon^{\mu\nu\rho\omega} \bar{\sigma}_\omega \quad (\text{A.67})$$

- Para las matrices de Dirac tomamos la representación quiral

$$\Gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.68})$$

- La convención para la matriz de quiralidad es

$$\Gamma^5 = i\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3\Gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.69})$$

- La convención para los generadores de Lorentz es ³

$$\Sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4} [\Gamma^\mu, \Gamma^\nu] = \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad (\text{A.70})$$

donde

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu] \quad (\text{A.71})$$

$$\bar{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu] \quad (\text{A.72})$$

que satisfacen la relación de trazas

$$\text{tr} \sigma^{\mu\nu} \sigma^{\rho\sigma} = \frac{1}{2} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{A.73})$$

y las relaciones de dualidad (cf.(A.122))

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \sigma_{\rho\sigma} \quad (\text{A.74})$$

$$\bar{\sigma}^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\sigma}_{\rho\sigma} \quad (\text{A.75})$$

La representación (A.68) para las matrices Γ muestra que aparecen contenidos, naturalmente, en un espinor de Dirac dos espinores de Weyl de quiralidades opuestas. Dado que frente a transformaciones de Lorentz un espinor de Dirac Ψ_D transforma como

$$\Psi \longrightarrow \mathcal{S}\Psi \quad (\text{A.76})$$

³El generador de rotaciones en el espacio-tiempo $M^{\mu\nu}$ del grupo de Lorentz es $M^{\mu\nu} = x^\mu P^\nu - x^\nu P^\mu + \Sigma^{\mu\nu}$.

donde

$$\mathcal{S} = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}} \quad (\text{A.77})$$

vemos que si denotamos

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.78})$$

debido a (A.70) χ y $\bar{\xi}$ transforman independientemente frente a transformaciones de Lorentz

$$\psi_\alpha \longrightarrow (S)_\alpha^\beta \psi_\beta \equiv \left(e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}} \right)_\alpha^\beta \psi_\beta \quad (\text{A.79})$$

$$\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \longrightarrow ([S^\dagger]^{-1})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \equiv \left(e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\mu\nu}} \right)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \quad (\text{A.80})$$

- El adjunto de Dirac se define como

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \Gamma^0 = \begin{pmatrix} \xi^\alpha & \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.81})$$

- El conjugado de carga se define a partir de este último espinor como⁴

$$\Psi^c \equiv C \bar{\Psi}^T \quad \text{con} \quad C \Gamma^\mu{}^T = -\Gamma^\mu C \quad (\text{A.82})$$

Para nuestra convención de matrices Γ ec.(A.68) tenemos

$$C = -i \Gamma^2 \Gamma^0 = \begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix} \implies C^T = -C \quad (\text{A.83})$$

luego

$$\Psi^c = C \bar{\Psi}^T = \begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^\beta \\ \bar{\chi}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.84})$$

El número de grados de libertad puede ser reducido mediante distintos procedimientos.

Los fermiones χ y $\bar{\xi}$ en (A.78) son las componentes de Weyl de $\Psi_D = \Psi_L + \Psi_R$ donde

$$\Psi_L \equiv \frac{1}{2}(1 + \Gamma^5)\Psi = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.85})$$

$$\Psi_R \equiv \frac{1}{2}(1 - \Gamma^5)\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.86})$$

⁴Partiendo de Ψ que satisface $(i\not{D} + e\not{A} - m)\Psi = 0$ se busca definir Ψ^c en términos de $\bar{\Psi}$ de manera que satisfaga $(i\not{D} - e\not{A} - m)\Psi^c = 0$.

- El espinor de Majorana Ψ_M se define como aquel que satisface la propiedad de ser autoconjugado de carga

$$\underline{\text{Espinor de Majorana}} : \Psi_M \Leftrightarrow \Psi_M^c = \Psi_M \quad (\text{A.87})$$

entonces

$$C\bar{\Psi}_M^T = \Psi_M \implies \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \implies \xi = \chi \quad (\text{A.88})$$

Luego los fermiones de Majorana en nuestra notación se escriben

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.89})$$

$$\bar{\Psi}_M = \begin{pmatrix} \psi^\alpha & \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.90})$$

De donde deducimos que no pueden existir espinores de Majorana-Weyl en $d = 4$ por ser incompatible (A.89) con las ecs.(A.85)-(A.86).

Identidades

$$\psi^\alpha \psi^\beta = -\frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \psi^2 \quad (\text{A.91})$$

$$\psi_\alpha \psi_\beta = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} \psi^2 \quad (\text{A.92})$$

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}} = \frac{1}{2} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\psi}^2 \quad (\text{A.93})$$

$$\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}_{\dot{\beta}} = -\frac{1}{2} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\psi}^2 \quad (\text{A.94})$$

$$((\phi\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}})^\dagger = (\sigma^\mu \bar{\phi})_\alpha \quad (\text{A.95})$$

$$((\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \theta)_\alpha)^\dagger = (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\theta})_{\dot{\alpha}} \quad (\text{A.96})$$

$$\sigma^{\mu\nu\dagger} = \bar{\sigma}^{\mu\nu} \quad (\text{A.97})$$

$$(\theta\chi)(\theta\psi) = -\frac{1}{2} \theta^2 \chi\psi \quad (\text{A.98})$$

$$(\theta\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \theta) = \theta^2 g^{\mu\nu} \quad (\text{A.99})$$

$$(\theta\sigma^\mu \bar{\theta})(\theta\sigma^\nu \bar{\theta}) = \frac{1}{2} \theta^2 \bar{\theta}^2 g^{\mu\nu} \quad (\text{A.100})$$

$$\theta\sigma^\mu \bar{\theta}(\sigma^\nu \bar{\theta})_\alpha = \frac{1}{2} \bar{\theta}^2 (\theta\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)_\alpha \quad (\text{A.101})$$

$$(\lambda\sigma^\mu \bar{\theta})(\theta\sigma^\nu \bar{\theta}) = \frac{1}{2} \bar{\theta}^2 \lambda\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \theta \quad (\text{A.102})$$

$$\theta\sigma^\mu\bar{\chi} = \bar{\chi}\theta\sigma^\mu = \sigma^\mu\bar{\chi}\theta = -\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\theta \quad (\text{A.103})$$

$$\sigma^\rho\bar{\theta}\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\theta = -\bar{\theta}\bar{\sigma}^\rho\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\theta \quad (\text{A.104})$$

$$(\theta\sigma^\omega\bar{\theta})(\bar{\theta}\sigma^\rho\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\theta) = -\frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2(g^{\rho\mu}g^{\nu\omega} - g^{\rho\nu}g^{\mu\omega} + g^{\mu\nu}g^{\rho\omega} + i\varepsilon^{\mu\nu\rho\omega}) \quad (\text{A.105})$$

$$\theta\sigma^\rho\bar{\sigma}^\omega\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\theta = \theta^2(g^{\rho\omega}g^{\mu\nu} - g^{\rho\mu}g^{\omega\nu} + g^{\rho\nu}g^{\omega\mu} - i\varepsilon^{\rho\omega\mu\nu}) \quad (\text{A.106})$$

$$\epsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\beta} = -\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} \quad (\text{A.107})$$

Propiedades de las matrices Γ

- Para nuestra convención de Γ^5 ec.(A.69) tenemos

$$(\Gamma^5)^2 = 1 \quad (\text{A.108})$$

- Toda representación para las matrices Γ satisface

$$\Gamma^{0\dagger} = \Gamma^0 \quad (\text{A.109})$$

$$\Gamma^{i\dagger} = -\Gamma^i \quad (\text{A.110})$$

$$\Gamma^{\mu\dagger} = \Gamma^0\Gamma^\mu\Gamma^0 \quad (\text{A.111})$$

$$\Gamma^{\mu T} = -C^{-1}\Gamma^\mu C \quad (\text{A.112})$$

- Para la representación quirral (A.68) vale

$$\Gamma^{0T} = \Gamma^0 \quad (\text{A.113})$$

$$\Gamma^{1T} = -\Gamma^1 \quad (\text{A.114})$$

$$\Gamma^{2T} = \Gamma^2 \quad (\text{A.115})$$

$$\Gamma^{3T} = -\Gamma^3 \quad (\text{A.116})$$

$$C = -i\Gamma^2\Gamma^0 \quad (\text{A.117})$$

- Para el producto de varias Γ 's tenemos

$$\Gamma^\mu\Gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} - \Gamma^\nu\Gamma^\mu \quad (\text{A.118})$$

$$\Gamma^\mu\Gamma^\nu\Gamma^\rho = g^{\mu\nu}\Gamma^\rho - g^{\mu\rho}\Gamma^\nu + g^{\nu\rho}\Gamma^\mu - i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Gamma^5\Gamma_\sigma \quad (\text{A.119})$$

$$\Sigma^{\mu\nu}\Gamma^\rho = \frac{i}{2}(\Gamma^\mu g^{\nu\rho} - \Gamma^\nu g^{\mu\rho}) + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Gamma^5\Gamma_\sigma \quad (\text{A.120})$$

$$\Sigma^{\mu\nu}\Gamma^\rho = -\Gamma^\rho\Sigma^{\mu\nu} + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Gamma^5\Gamma_\sigma \quad (\text{A.121})$$

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Gamma^5\Sigma_{\rho\sigma} \quad (\text{A.122})$$

$$\Sigma^{\mu\nu\dagger} = \Gamma^0\Sigma^{\mu\nu}\Gamma^0 \quad (\text{A.123})$$

- Contracciones y trazas

$$\Gamma^\mu\Gamma_\mu = 4 \quad (\text{A.124})$$

$$\text{tr}\Gamma^\mu = 0 \quad (\text{A.125})$$

$$\text{tr}\Gamma^5 = 0 \quad (\text{A.126})$$

$$\text{tr}\Gamma^5\Gamma^\mu = 0 \quad (\text{A.127})$$

$$\text{tr}\Gamma^\mu\Gamma^\nu = 4g^{\mu\nu} \quad (\text{A.128})$$

$$\text{tr}\Gamma^5\Gamma^\mu\Gamma^\nu = 0 \quad (\text{A.129})$$

$$\text{tr}\Gamma^{\mu_1} \dots \Gamma^{\mu_{2n+1}} = 0 \quad (\text{A.130})$$

$$\text{tr}\Gamma^5\Gamma^{\mu_1} \dots \Gamma^{\mu_{2n+1}} = 0 \quad (\text{A.131})$$

Relaciones entre espinores de Weyl y de Majorana

Ecuaciones escritas en términos de espinores de Weyl pueden ser reexpresadas, teniendo en cuenta las expresiones (A.89) y (A.90, en términos de espinores de Majorana. Los espinores de Majorana tienen las siguientes propiedades

$$\bar{\Psi}\Gamma^\mu\Psi = 0 \quad (\text{A.132})$$

$$\bar{\Lambda}\Psi = \bar{\Psi}\Lambda \quad (\text{A.133})$$

$$\bar{\Lambda}\Gamma^5\Psi = \bar{\Psi}\Gamma^5\Lambda \quad (\text{A.134})$$

$$\bar{\Lambda}\Gamma^\mu\Psi = -\bar{\Psi}\Gamma^\mu\Lambda \quad (\text{A.135})$$

$$\bar{\Lambda}\Gamma^5\Gamma^\mu\Psi = \bar{\Psi}\Gamma^5\Gamma^\mu\Lambda \quad (\text{A.136})$$

$$\bar{\Lambda}\Sigma^{\mu\nu}\Gamma^\rho\Psi = \bar{\Psi}\Gamma^\rho\Sigma^{\mu\nu}\Lambda \quad (\text{A.137})$$

- Términos cinéticos:

$$\psi\bar{\psi} = \frac{1}{2}\bar{\Psi}(1 + \Gamma^5)\Psi \quad (\text{A.138})$$

$$\bar{\psi}\bar{\not{\partial}}\psi = \frac{1}{2}\bar{\Psi}(1 - \Gamma^5)\not{\partial}\Psi \quad (\text{A.139})$$

donde se debe entender

$$\not{\partial} = \sigma^\mu \partial_\mu \quad (\text{A.140})$$

$$\bar{\not{\partial}} = \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \quad (\text{A.141})$$

- Términos de masa

$$\psi\psi = \frac{1}{2}\bar{\Psi}(1 + \Gamma^5)\Psi \quad (\text{A.142})$$

$$\bar{\psi}\bar{\psi} = \frac{1}{2}\bar{\Psi}(1 - \Gamma^5)\Psi \quad (\text{A.143})$$

$$\psi\lambda = \frac{1}{2}\bar{\Psi}(1 + \Gamma^5)\Lambda \quad (\text{A.144})$$

$$\bar{\psi}\bar{\lambda} = \frac{1}{2}\bar{\Psi}(1 - \Gamma^5)\Lambda \quad (\text{A.145})$$

- Términos de corriente

$$\psi\sigma^\mu\bar{\psi} = \frac{1}{2}\bar{\Psi}\Gamma^5\Gamma^\mu\Psi \quad (\text{A.146})$$

$$\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\psi = -\frac{1}{2}\bar{\Psi}\Gamma^5\Gamma^\mu\Psi \quad (\text{A.147})$$

$$\lambda\sigma^\mu\bar{\psi} = \frac{1}{2}\bar{\Lambda}(1 + \Gamma^5)\Gamma^\mu\Psi \quad (\text{A.148})$$

$$\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\psi = \frac{1}{2}\bar{\Lambda}(1 - \Gamma^5)\Gamma^\mu\Psi \quad (\text{A.149})$$

Acción de Born-Infeld ('34)

Usando la siguiente identidad

$$\det(g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}) = \det(g_{\mu\rho}(\delta_\nu^\rho + F_\nu^\rho)) \quad (\text{A.150})$$

$$= g \cdot \det(\delta_\nu^\rho + F_\nu^\rho) \quad (\text{A.151})$$

donde $g = \det g_{\mu\nu}$ y $F_\nu^\rho = g^{\rho\mu}F_{\mu\nu}$, y recordando que el tensor de Levi-Civita en espacio curvo se define como⁵

$$j^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{\sqrt{-g}} \implies j_{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{-g} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{A.152})$$

⁵La presencia de $\sqrt{-g}$ en el denominador de $j^{\mu\nu\rho\sigma}$ hace que la generalización a espacio curvo de $F\tilde{F}$ definida por la ec.(A.156) sea efectivamente un invariante topológico.

(donde hemos usado que $\varepsilon_{0123} = -\varepsilon^{0123}$). La definición del lagrangiano de Born-Infeld en espacio curvo queda

$$\mathcal{L}_{BI} = \left(\sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} - \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})} \right) \quad (\text{A.153})$$

$$= \sqrt{-g} (1 + \mathcal{F} - \mathcal{G}^2) \quad (\text{A.154})$$

$$= \sqrt{-g} L \quad (\text{A.155})$$

donde

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \quad \mathcal{G} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{8\sqrt{-g}} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \quad (\text{A.156})$$

En espacio curvo, la ec.(A.18) sigue valiendo si el dual se define como $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} j^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$.

Acción, ecuaciones de movimiento y leyes de conservación

- Partiendo de una acción general

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} L(g_{\mu\nu}, \mathcal{F}, \mathcal{G}) \quad (\text{A.157})$$

donde F y G fueron definidos por las ecs.(A.156), deducimos las siguientes ecuaciones de movimiento (teniendo en cuenta que $F = dA$)

$$\nabla_\mu D^{\mu\nu} = 0 \quad \implies \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} D^{\mu\nu}) \quad (\text{A.158})$$

$$dF = 0 \quad \implies \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \tilde{F}^{\mu\nu}) = 0 \quad (\text{A.159})$$

donde $\nabla = \partial + \Gamma$ y hemos definido $D^{\mu\nu}$ como [2],[83]⁶

$$D^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta F_{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta L}{\delta F_{\mu\nu}} \quad (\text{A.160})$$

En términos de vectores 3-dimensionales tenemos que $F_{\mu\nu} = (\vec{E}, \vec{B})$ contiene los campos ponderomotrices y que $D^{\mu\nu} = (\vec{D}, \vec{H})$ contiene los vectores de desplazamiento eléctrico e inducción magnética. Para el caso de BI en el que L esta dado por (A.154)-(A.155) se obtiene

$$D^{\mu\nu} = \frac{F^{\mu\nu} - \mathcal{G} \tilde{F}^{\mu\nu}}{\sqrt{1 + \mathcal{F} - \mathcal{G}^2}} \quad (\text{A.161})$$

⁶La ausencia de un 2 en la ec.(3.3) del paper original de Born-Infeld se debe a que ellos derivan el lagrangiano considerando la antisimetría de $F_{\mu\nu}$.

- Las leyes de conservación, debidas a la invariancia frente a difeomorfismos, pueden ser deducidas de las identidades de Bianchi (A.159) y las ecuaciones de movimiento (A.158) obteniéndose⁷

$$\nabla_\mu T^\mu_\rho = 0 \quad (\text{A.162})$$

donde el tensor de energía impulso T^μ_ρ está definido como

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta g^{\mu\nu}} = D_{\mu\rho} F^\rho_\nu - g_{\mu\nu} L \quad (\text{A.163})$$

- Con el objeto de definir el hamiltoniano y mostrar una formulación equivalente (dual) de la teoría de BI, definimos

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \tilde{D}^{\mu\nu} D_{\mu\nu} = \frac{-\mathcal{F} + \mathcal{G}^2 \mathcal{F} + 4\mathcal{G}^2}{1 + \mathcal{F} - \mathcal{G}^2} \quad (\text{A.164})$$

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{4} D^{\mu\nu} \tilde{D}_{\mu\nu} = \mathcal{G} \quad (\text{A.165})$$

Con estas definiciones es posible mostrar que es posible expresar, en la teoría de BI, $F_{\mu\nu}$ en términos de $D_{\mu\nu}$ como

$$F_{\mu\nu} = \frac{D_{\mu\nu} + \mathcal{Q} \tilde{D}_{\mu\nu}}{\sqrt{1 + \mathcal{P} - \mathcal{Q}^2}} \quad (\text{A.166})$$

Definiendo entonces ⁸

$$H(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = -\frac{1}{2} D^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - L \quad (\text{A.167})$$

$$= \sqrt{1 + \mathcal{P} - \mathcal{Q}^2} - 1 \quad , \quad (\text{A.168})$$

tenemos que

$$\frac{\delta H}{\delta \tilde{D}_{\mu\nu}} = \frac{\tilde{D}^{\mu\nu} - \mathcal{Q} D^{\mu\nu}}{2\sqrt{1 + \mathcal{P} - \mathcal{Q}^2}} = \frac{1}{2} \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (\text{A.169})$$

La formulación equivalente de la teoría se obtiene definiendo el hamiltoniano como

$$\mathcal{H} = \sqrt{-g} H = \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + \tilde{D}_{\mu\nu})} - \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} \quad (\text{A.170})$$

y tomando que

$$\tilde{D}_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (\text{A.171})$$

⁷Obviamente también podemos deducirlas usando el teorema de Noether.

⁸El factor 1/2 en la definición del hamiltoniano viene de la definición de $D^{\mu\nu}$ dada por la ecuación (A.160).

Luego, no solo tenemos las ecuaciones de movimiento que se derivan de (A.170)

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\frac{\delta H}{\delta\tilde{D}_{\mu\nu}})=0 \iff \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\tilde{F}^{\mu\nu})=0 \quad (\text{A.172})$$

(donde hemos usado (A.169)) sino también las identidades de Bianchi correspondientes a (A.171)

$$d\tilde{D}=0 \implies \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}D^{\mu\nu})=0 \quad (\text{A.173})$$

Tenemos entonces dos formulaciones equivalentes para la teoría sin fuentes en términos de \mathcal{L} y en términos de \mathcal{H} cf. (A.158)-(A.159) con (A.172)-(A.173) (ver también [81]). Estas formulaciones son la base para el estudio de la simetría de dualidad en la teoría de BI [82],[84].

Appendix B

Componentes de los supercampos

- Derivadas en el superespacio:

$$\begin{aligned}
 \partial_\alpha &= \partial/\partial\theta^\alpha & \partial^\alpha &= \partial/\partial\theta_\alpha &= -\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\beta \\
 \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} &= \partial/\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} & \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} &= \partial/\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} &= -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\partial}^{\dot{\beta}} \\
 \partial_\alpha\theta^\beta &= \delta_\alpha^\beta & \bar{\partial}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}} &= \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \\
 \partial^\alpha\theta^\beta &= -\epsilon^{\alpha\beta} & \partial_\alpha\theta_\beta &= -\epsilon_{\alpha\beta} \\
 \bar{\partial}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} &= -\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} & \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}} &= -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \\
 \partial_\alpha\theta^2 &= 2\theta_\alpha & \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^2 &= -2\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \\
 \partial^2\theta^2 &= 4 & \bar{\partial}^2\bar{\theta}^2 &= 4 \\
 \partial^\alpha\theta^2 &= -2\theta^\alpha & \bar{\partial}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^2 &= 2\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \\
 \partial^2 &= 2\partial_1\partial_2 & \partial_\alpha\partial_\beta &= -\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\partial^2
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Notar que las derivadas espinoriales no suben y bajan los índices con ϵ sino con $-\epsilon$.

- Integración en el superespacio:

Las integrales en las variables θ (grassmanns) es la usual siguiendo la definición de Berezin

$$\int d\theta \theta = 1 \tag{B.2}$$

$$\int d\theta = 0 \tag{B.3}$$

$$\int d\theta f(\theta) = f_1 \tag{B.4}$$

donde usamos que una función arbitraria de una única variable de Grassmann θ tiene una expansión de Taylor $f(\theta) = f_0 + \theta f_1$.

En el caso de superespacio $N = 1$ la convención es

$$d^2\theta = -\frac{1}{4}d\theta^\alpha d\theta^\beta \epsilon_{\alpha\beta} \tag{B.5}$$

$$d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{4}d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}d\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \quad (\text{B.6})$$

$$d^4\theta = d^2\theta d^2\bar{\theta} \quad (\text{B.7})$$

Obteniéndose las identidades

$$\int d^2\theta \theta^2 = 1 \quad (\text{B.8})$$

$$\int d^2\bar{\theta} \bar{\theta}^2 = 1 \quad (\text{B.9})$$

- Para obtener lagrangianos supersimétricos debemos tomar la componente mas alta del supercampo. En el formalismo esto se logra integrando en $d^4\theta$ para un supercampo real y en $d^2\theta$ para un supercampo quirral. Las convenciones son:

Supercampo quirral:

$$\Phi = \phi + \sqrt{2}\theta\psi + \theta^2 F \quad (\text{B.10})$$

Supercampo vectorial:

$$V_{WZ} = -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu + i\theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda} - i\bar{\theta}^2\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2 D \quad (\text{B.11})$$

Combinando convenientemente supercampos se obtienen distintos modelos supersimétricos ¹:

Modelo de Wess-Zumino

$$\text{Cinéticos :} \quad \int d^4\theta \Phi^\dagger \Phi = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + F^\dagger F - i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \quad (\text{B.12})$$

$$\text{Superpotencial :} \quad \int d^2\theta \mathcal{W}(\Phi) + h.c. = \left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \phi} F - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial^2 \phi} \psi^2 \right) + h.c. \quad (\text{B.13})$$

Modelo de Higgs supersimétrico

$$\begin{aligned} \text{Cinéticos :} \quad \int d^4\theta \Phi^\dagger e^{2V} \Phi &= (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi + F^\dagger F \\ &\quad + D\phi^\dagger \phi + i\sqrt{2}\phi^\dagger \lambda \psi - i\sqrt{2}\phi \bar{\psi} \bar{\lambda} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\text{Fayet - Iliopoulos :} \quad \int d^4\theta 2\xi^2 V = \xi^2 D \quad (\text{B.15})$$

¹A menos de términos de superficie.

donde la derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$ ². La invarianza de supergauge restringe los posibles superpotenciales que ahora deben ser invariantes frente a (3.126).

Super Yang-Mills

$$\frac{1}{4\pi} \text{Im} \left(\tau \text{Tr} \int d^2\theta W^\alpha W_\alpha \right) = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{\theta}{32\pi^2} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{a\mu\nu} + \frac{1}{2g^2} D^a D^a - \frac{i}{g^2} \lambda^a \sigma^\mu (D_\mu \bar{\lambda})^a \quad (\text{B.16})$$

donde la normalización de los generadores es $\text{Tr} t^a t^b = \frac{1}{2} \delta^{ab}$ y la derivada covariante D_μ actúa sobre el fermión en la adjunta $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}^a t^a$ como $D_\mu \bar{\lambda} = \partial_\mu \bar{\lambda} + i[A_\mu, \bar{\lambda}]$. $F_{\mu\nu}$ también en la adjunta se escribe como $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu]$.

- Componentes de los distintos supercampos necesarios para la construcción de la extensión supersimétrica de la acción de Born-Infeld abeliana.

Supermultipletes de curvatura W_α y $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$

$$W_\alpha(y, \theta) = \frac{1}{4} \bar{D}_{\dot{\beta}} \bar{D}^{\dot{\beta}} D_\alpha V \quad (\text{B.17})$$

$$= i\lambda_\alpha - \theta_\alpha D + \frac{i}{2} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \theta)_\alpha F_{\mu\nu} - \theta^2 (\not{\partial} \bar{\lambda})_\alpha \quad (\text{B.18})$$

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}}(y^\dagger, \bar{\theta}) = \frac{1}{4} D^\beta D_\beta \bar{D}_{\dot{\alpha}} V \quad (\text{B.19})$$

$$= -i\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} - \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} D - \frac{i}{2} (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\theta})_{\dot{\alpha}} F_{\mu\nu} + \bar{\theta}^2 (\bar{\not{\partial}} \lambda)_{\dot{\alpha}} \quad (\text{B.20})$$

donde

$$(\not{\partial} \bar{\lambda})_\alpha = \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \quad (\text{B.21})$$

$$(\bar{\not{\partial}} \lambda)_{\dot{\alpha}} = \bar{\sigma}^\mu_{\dot{\alpha}\alpha} \partial_\mu \lambda^\alpha \quad (\text{B.22})$$

Notemos que

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} = (W_\alpha)^\dagger \quad (\text{B.23})$$

²El acoplamiento con el campo de gauge A_μ en la derivada covariante actuando sobre los fermiones de Weyl se expresa en términos de fermiones de Majorana como $\bar{\Psi} \Gamma^\mu \mathcal{D}_\mu^{(5)} \Psi$ donde $\mathcal{D}_\mu^{(5)} = \partial_\mu + i\Gamma^5 A_\mu$. No puede ser de otra manera ya que para majoranas $\bar{\Psi} \Gamma^\mu \Psi = 0$.

Solo hay componentes puramente bosónicas en $\theta^2(\bar{\theta}^2)$ de $W_\alpha(\bar{W}_{\dot{\alpha}})$.

Supercampo W^2 : En variables $(x, \theta, \bar{\theta})$

$$W^2(x)\big|_0 = -\lambda^2 \quad (\text{B.24})$$

$$W^2(x)\big|_\theta = -2iD\theta\lambda + F_{\mu\nu}\theta\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\lambda \quad (\text{B.25})$$

$$W^2(x)\big|_{\theta^2} = \theta^2(-2i\lambda\bar{\theta}\bar{\lambda} + A) \quad (\text{B.26})$$

$$W^2(x)\big|_{\theta\bar{\theta}} = -i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\lambda^2 \quad (\text{B.27})$$

$$W^2(x)\big|_{\theta^2\bar{\theta}} = -\theta^2\partial_\mu(\Omega^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho}\lambda\sigma^\rho\bar{\theta}) \quad (\text{B.28})$$

$$W^2(x)\big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} = \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\lambda^2 \quad (\text{B.29})$$

donde

$$\begin{aligned} A &= D^2 - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{i}{2}F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \\ A^* &= D^2 - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{i}{2}F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \\ \Omega^{\mu\nu} &= D\eta^{\mu\nu} + iF^{\mu\nu} - \tilde{F}^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

En todos lados, salvo que se diga lo contrario, D , $F_{\mu\nu}$, $\tilde{F}_{\mu\nu}$ y λ son funciones de x .

Las componentes de \bar{W}^2 pueden ser obtenidas de estas últimas expresiones calculando el adjunto.

Supercampo $W^2\bar{W}^2(x)$: En variables x

$$W^2\bar{W}^2(x)\big|_0 = \lambda^2\bar{\lambda}^2 \quad (\text{B.31})$$

$$W^2 \bar{W}^2(x) \Big|_{\theta} = 2i \bar{\lambda}^2 \left(D \theta \lambda - \frac{i}{2} \theta \sigma^{\mu} \bar{\sigma}^{\nu} \lambda F_{\mu\nu} \right) \quad (\text{B.32})$$

$$W^2 \bar{W}^2(x) \Big|_{\theta^2} = \theta^2 \bar{\lambda}^2 \left(2i \lambda \not{\partial} \bar{\lambda} - A \right) \quad (\text{B.33})$$

$$\begin{aligned} W^2 \bar{W}^2(x) \Big|_{\theta \bar{\theta}} &= -i \theta \sigma^{\mu} \bar{\theta} \lambda^2 \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \bar{\lambda}^2 + 4 \left(D \theta \lambda + \frac{i}{2} F_{\mu\nu} \theta \sigma^{\mu} \bar{\sigma}^{\nu} \lambda \right) \\ &\quad \cdot \left(D \bar{\theta} \bar{\lambda} - \frac{i}{2} F_{\rho\sigma} \bar{\theta} \bar{\sigma}^{\rho} \sigma^{\sigma} \bar{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

$$\begin{aligned} W^2 \bar{W}^2(x) \Big|_{\theta^2 \bar{\theta}} &= \theta^2 \left\{ \left(2i D \bar{\theta} \bar{\lambda} - \bar{\lambda} \bar{\sigma}^{\mu} \sigma^{\nu} \bar{\theta} F_{\mu\nu} \right) \left(-2i \lambda \not{\partial} \bar{\lambda} + A \right) + \right. \\ &\quad \left. \left(\Omega^{\tau\rho} \eta_{\tau\mu} \bar{\theta} \bar{\sigma}^{\mu} \lambda \right) \overleftrightarrow{\partial}_{\rho} \left(\bar{\lambda}^2 \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

$$\begin{aligned} W^2 \bar{W}^2 \Big|_{\theta^2 \bar{\theta}^2} &= \theta^2 \bar{\theta}^2 \left\{ -\frac{1}{4} \left(\lambda^2 \square \bar{\lambda}^2 + \bar{\lambda}^2 \square \lambda^2 \right) + \frac{1}{2} \partial_{\mu} \left(\lambda^2 \right) \partial^{\mu} \left(\bar{\lambda}^2 \right) \right. \\ &\quad - 4 \left(\lambda \not{\partial} \bar{\lambda} \right) \left(\bar{\lambda} \not{\partial} \lambda \right) - 2i A^* \lambda \not{\partial} \bar{\lambda} - 2i A \bar{\lambda} \not{\partial} \lambda + A A^* \\ &\quad \left. + 2i \text{Im} U \right\} \end{aligned}$$

donde

$$A \overleftrightarrow{\partial} B = A \partial B - (\partial A) B$$

$$U = -i \lambda \partial_{\rho} \left((\Omega^{\rho\mu})^* \sigma^{\nu} \bar{\lambda} \right) \Omega_{\mu\nu} \quad (\text{B.36})$$

$$\Omega^{*\nu\rho} \Omega_{\rho\mu} = \left(D^2 + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \delta_{\mu}^{\nu} - 2 D \eta^{\nu\rho} \tilde{F}_{\rho\mu} + 2 F^{\nu\rho} F_{\rho\mu} \quad (\text{B.37})$$

y

$$\text{Im} \left(\partial_{\nu} \left(\Omega^{*\nu\rho} \right) \Omega_{\rho\mu} \right) = -D \partial_{\nu} F^{\nu\mu} + \partial_{\nu} \left(F^{\nu\alpha} \right) \tilde{F}_{\alpha\mu} + \tilde{F}^{\nu\alpha} \partial_{\nu} F_{\alpha\mu} + \frac{1}{2} \partial_{\mu} \left(F_{\alpha\beta} \right) \tilde{F}^{\alpha\beta} \quad (\text{B.38})$$

Supercampo $X(x) \equiv \frac{1}{8} \left(D^2 W^2(x) + \bar{D}^2 \bar{W}^2(x) \right)$

$$X|_0 = \left(i \left(\lambda \not{\partial} \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \not{\partial} \lambda \right) - D^2 + \frac{1}{2} F^2 \right) \quad (\text{B.39})$$

$$X|_{\theta} = -\partial_{\mu}(D \bar{\lambda} \bar{\sigma}^{\mu} \theta) - \frac{i}{2} \partial_{\rho}(F_{\mu\nu} \bar{\lambda} \bar{\sigma}^{\mu} \sigma^{\nu} \bar{\sigma}^{\rho} \theta) \quad (\text{B.40})$$

$$X|_{\bar{\theta}} = \partial_{\mu}(D \lambda \sigma^{\mu} \bar{\theta}) - \frac{i}{2} \partial_{\rho}(F_{\mu\nu} \lambda \sigma^{\mu} \bar{\sigma}^{\nu} \sigma^{\rho} \bar{\theta}) \quad (\text{B.41})$$

$$X|_{\theta\bar{\theta}} = i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}\left(\lambda\bar{\theta}\bar{\lambda} - \bar{\lambda}\bar{\theta}\lambda + \frac{1}{2}F\tilde{F}\right) \quad (\text{B.42})$$

$$X|_{\theta^2} = -\frac{1}{2}\theta^2\Box\bar{\lambda}^2 \quad (\text{B.43})$$

$$X|_{\bar{\theta}^2} = -\frac{1}{2}\bar{\theta}^2\Box\lambda^2 \quad (\text{B.44})$$

$$X|_{\theta^2\bar{\theta}} = \theta^2\Box\left[\frac{i}{2}(D\bar{\lambda}\bar{\theta}) - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}\bar{\lambda}\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}\bar{\theta})\right] \quad (\text{B.45})$$

$$X|_{\theta\bar{\theta}^2} = -\bar{\theta}^2\Box\left[\frac{i}{2}(D\lambda\theta) + \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}\lambda\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}\theta)\right] \quad (\text{B.46})$$

$$X|_{\theta^2\bar{\theta}^2} = -\frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\left(i(\lambda\bar{\theta}\bar{\lambda} + \bar{\lambda}\bar{\theta}\lambda) - D^2 + \frac{1}{2}F^2\right) \quad (\text{B.47})$$

Supercampo $Y(x) \equiv -\frac{i}{16}(D^2W^2(x) - \bar{D}^2\bar{W}^2(x))$

$$Y|_0 = \frac{1}{2}(\lambda\bar{\theta}\bar{\lambda} - \bar{\lambda}\bar{\theta}\lambda) + \frac{1}{4}F\tilde{F} \quad (\text{B.48})$$

$$Y|_{\theta} = -\frac{i}{2}\partial_{\mu}(D\bar{\lambda}\bar{\sigma}^{\mu}\theta) + \frac{1}{4}\partial_{\rho}(F_{\mu\nu}\bar{\lambda}\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\rho}\theta) \quad (\text{B.49})$$

$$Y|_{\bar{\theta}} = -\frac{i}{2}\partial_{\mu}(D\lambda\sigma^{\mu}\bar{\theta}) - \frac{1}{4}\partial_{\rho}(F_{\mu\nu}\lambda\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\rho}\bar{\theta}) \quad (\text{B.50})$$

$$Y|_{\theta\bar{\theta}} = \frac{1}{2}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\left(-i(\lambda\bar{\theta}\bar{\lambda} + \bar{\lambda}\bar{\theta}\lambda) + D^2 - \frac{1}{2}F^2\right) \quad (\text{B.51})$$

$$Y|_{\theta^2} = -\frac{i}{4}\theta^2\Box\bar{\lambda}^2 \quad (\text{B.52})$$

$$Y|_{\bar{\theta}^2} = \frac{i}{4}\bar{\theta}^2\Box\lambda^2 \quad (\text{B.53})$$

$$Y|_{\theta^2\bar{\theta}} = -\theta^2\Box\left[\frac{1}{4}(D\bar{\lambda}\bar{\theta}) + \frac{i}{8}(F_{\mu\nu}\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\theta})\right] \quad (\text{B.54})$$

$$Y|_{\bar{\theta}^2\theta} = -\bar{\theta}^2\Box\left[\frac{1}{4}(D\lambda\theta) - \frac{i}{8}(F_{\mu\nu}\lambda\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\theta)\right] \quad (\text{B.55})$$

$$Y|_{\theta^2\bar{\theta}^2} = -\frac{1}{8}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\left((\lambda\bar{\theta}\bar{\lambda} - \bar{\lambda}\bar{\theta}\lambda) + \frac{1}{2}F\tilde{F}\right) \quad (\text{B.56})$$

Appendix C

Reducción dimensional $d = 4 \rightarrow d = 3$

- La reducción dimensional en la coordenada x^3 consiste en tomar

$$\begin{aligned} \cdot \quad \partial_3 &= 0 \\ \cdot \quad A_3 &\rightarrow \text{campo escalar} \end{aligned}$$

- Para los índices en $d = 4$ usamos letras griegas $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$.
- Para los índices en $d = 3$ letras latinas $i, j, \dots = 0, 1, 2$.
- La convención para la métrica es $g = \text{diag}(+, -, -, \dots)$.
- Los tensores de Levi-Civita valen

$$\begin{aligned} \underline{d=4}: \quad \varepsilon_{0123} &= 1, \quad \varepsilon^{0123} = -1 \\ \underline{d=3}: \quad \varepsilon_{012} &= 1, \quad \varepsilon^{012} = 1 \end{aligned}$$

Tensor de campo electromagnético

- La 1-forma A_μ se reduce

$$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) \longrightarrow [A_i = (A_0, A_1, A_2)] \oplus N$$

- La 2-forma $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ en $d = 4$ queda

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & \partial_0 N \\ F_{10} & 0 & F_{12} & \partial_1 N \\ F_{20} & F_{21} & 0 & \partial_2 N \\ -\partial_0 N & -\partial_1 N & -\partial_2 N & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Luego resulta que

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}|_{d=4} \longrightarrow F_{ij}F^{ij} - 2\partial_i N \partial^i N|_{d=3} \quad (\text{C.2})$$

- El dual de Hodge definido en $d = 4$ como $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ queda

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_2 N & \partial_1 N & -F_{12} \\ \partial_2 N & 0 & -\partial_0 N & F_{02} \\ -\partial_1 N & \partial_0 N & 0 & -F_{01} \\ F_{12} & -F_{02} & F_{01} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

que da como resultado

$$F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}|_{d=4} \longrightarrow -4\partial_i N \tilde{F}^i|_{d=3} \quad (\text{C.4})$$

donde se define $\tilde{F}^i = \frac{\varepsilon^{ijk}}{2}F_{jk} = (F_{12}, -F_{02}, F_{01}) = (-B, -E_y, E_x)$.

Contracciones del tensor de Levi-Civita

- En $d = 3$ tenemos

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{iab} = \delta_a^i\delta_b^j - \delta_b^i\delta_a^j = \delta_{ab}^{jk} \quad (\text{C.5})$$

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{ija} = 2\delta_a^k \quad (\text{C.6})$$

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{ijk} = 3! \quad (\text{C.7})$$

Espinores

- Denotamos las matrices de Dirac como Γ en $d = 4$ y como γ en $d = 3$.
- Los espinores (Majorana) en $d = 4$ los denotamos con letras mayúsculas griegas Ψ, Λ, Υ . Los espinores de Dirac en $d = 3$ por mayúsculas griegas Σ, Ω y los espinores de Majorana en $d = 3$ mediante minúsculas griegas ψ, λ, ϵ .
- Las matrices de Dirac en $d = 4$ las escribimos ¹

$$\Gamma^i = \gamma^i \otimes \sigma^3 = \begin{pmatrix} \gamma^i & 0 \\ 0 & -\gamma^i \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

$$\Gamma^3 = 1 \otimes i\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.9})$$

$$\Gamma^5 = 1 \otimes -\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.10})$$

¹La matriz Γ^5 fue definida en (A.69).

donde las matrices de Dirac (2×2) en $d = 3$ son

$$\gamma^0 = \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.11})$$

$$\gamma^1 = i\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.12})$$

$$\gamma^2 = i\sigma^3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (\text{C.13})$$

de manera que tenemos una representación de Majorana (imaginaria pura) tanto en $d = 3$ como en $d = 4$. Para poder hallar la matriz de conjugación de carga C definida por la ec.(A.82) necesitamos conocer Γ^T

$$\underline{d=4} : \begin{cases} \Gamma^{0T} = -\Gamma^0 \\ \Gamma^{iT} = \Gamma^i \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{C.14})$$

$$\underline{d=3} : \begin{cases} \gamma^{0T} = -\gamma^0 \\ \gamma^{aT} = \gamma^a \end{cases} \quad (a = 1, 2) \quad (\text{C.15})$$

Si definimos la matriz de conjugación de carga C como (cf. ec.(A.83))

$$\underline{d=4} : C = -\Gamma^0 \quad (\text{C.16})$$

$$\underline{d=3} : C = -\gamma^0 \quad (\text{C.17})$$

con esta definición $C^2 = 1$ y los espinores autoconjugados de carga Ψ_M tienen componentes reales)²

$$\underline{\text{Espinor de Majorana}} : \Psi_M \Leftrightarrow \Psi_M^c = \Psi_M \implies \Psi^* = \Psi \quad (\text{C.20})$$

Al efectuar la reducción dimensional de un fermión de Majorana en $d = 4$ obtenemos

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.21})$$

$$\bar{\Psi}_M = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 & -\bar{\psi}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.22})$$

²Confrontar con la representación quirral (A.68) donde el espinor de Majorana se expresa en términos de espinores de Weyl como

$$Q_a^A = \begin{pmatrix} Q_\alpha^A \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}}^A \end{pmatrix} \quad (\text{C.18})$$

y satisface (ver ec.(A.87))

$$C_{ab}\bar{Q}_b^A = Q_a^A \implies \bar{Q}_a^A = -C_{ab}Q_b^A = Q_b^A C_{ba} \quad (\text{C.19})$$

Para C dada por la ec.(A.83) se tiene $C^2 = -1$.

donde ψ_1, ψ_2 son dos fermiones de Majorana en $d = 3$ (o sea fermiones de 2 componentes reales)³. Por conveniencia de notación acomodaremos estos dos fermiones en un fermión de Dirac Σ .

- Denotamos los generadores de Lorentz como $\Sigma^{\mu\nu}$ en $d = 4$ y como Δ^{ij} en $d = 3$.

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\Gamma^\mu, \Gamma^\nu] \quad (\text{C.23})$$

$$\Delta^{ij} = \frac{i}{4} [\gamma^i, \gamma^j] = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \gamma_k \quad (\text{C.24})$$

Entonces para la representación de Majorana (C.8)-(C.10) tenemos

$$\Sigma^{ij} = \Delta^{ij} \otimes I_2 = \begin{pmatrix} \Delta^{ij} & 0 \\ 0 & \Delta^{ij} \end{pmatrix} \quad (\text{C.25})$$

$$\Sigma^{3i} = \gamma^i \otimes \frac{i}{2} \sigma^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \gamma^i \\ -\gamma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.26})$$

Propiedades de espinores de Majorana en $d = 3$

- En $d = 3$ tenemos propiedades análogas a (A.132)-(A.137).

$$\bar{\psi} \gamma^i \psi = 0 \quad (\text{C.27})$$

$$\bar{\lambda} \psi = \bar{\psi} \lambda \quad (\text{C.28})$$

$$\bar{\lambda} \gamma^i \psi = -\bar{\psi} \gamma^i \lambda \quad (\text{C.29})$$

Propiedades de las matrices γ

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \quad (\text{C.30})$$

$$\gamma^{j\dagger} = -\gamma^j \quad (j = 1, 2) \quad (\text{C.31})$$

$$\gamma^{i\dagger} = \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 \quad (\text{C.32})$$

$$\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 = i I_2 \quad (\text{C.33})$$

$$\gamma^i \gamma^j = g^{ij} + i \varepsilon^{ijk} \gamma_k \quad (\text{C.34})$$

$$[\gamma^i, \gamma^j] = 2i \varepsilon^{ijk} \gamma_k \quad (\text{C.35})$$

³La definición del adjunto de Dirac en $d = 3$ es (A.81): $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$.

Reducción del álgebra supersimétrica $N = 1$ ($d = 4$) a $N = 2$ ($d = 3$)

- Teniendo en cuenta las relaciones (C.22) denotamos las supercargas Majorana en $d = 4$ como

$$Q = \begin{pmatrix} Q^1 \\ Q^2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.36})$$

donde $Q^{1,2}$ son las supercargas Majorana en $d = 3$. Partiendo del álgebra supersimétrica $N = 1$ en $d = 4$ ec.(3.20) tenemos

$$\{Q_a, \bar{Q}_b\} = \begin{pmatrix} \{Q^1, \bar{Q}^1\} & -\{Q^1, \bar{Q}^2\} \\ \{Q^2, \bar{Q}^1\} & -\{Q^2, \bar{Q}^2\} \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} \not{P} & iP_3 \\ iP_3 & -\not{P} \end{pmatrix} \quad (\text{C.37})$$

donde $\not{P} = \gamma^i P_i$. Obteniéndose

$$\{Q^1, \bar{Q}^1\} = -2\not{P} \quad (\text{C.38})$$

$$\{Q^2, \bar{Q}^2\} = -2\not{P} \quad (\text{C.39})$$

$$\{Q^1, \bar{Q}^2\} = 2iP_3 \quad (\text{C.40})$$

$$\{Q^2, \bar{Q}^1\} = -2iP_3 \quad (\text{C.41})$$

Multiplicando por C a derecha en las ecuaciones anteriores y utilizando la propiedad de que $C\bar{Q}^{1,2T} = Q^{1,2}$ obtenemos (comparar con ec.(3.19))

$$\{Q_a^A, Q_b^B\} = 2(\gamma^i C)_{ab} P_i \delta^{AB} - 2iC_{ab} P_3 \epsilon^{AB} \quad (\text{C.42})$$

donde $A, B = 1, 2$. Definiendo un espinor de Dirac $Q = \frac{1}{2}(Q^1 + iQ^2)$ tenemos

$$\{Q, \bar{Q}\} = -(\not{P} - Z) \quad (\text{C.43})$$

donde $Z = P_3$.

Bibliography

[1] M. Born, *Nature* **132** (1933) 282, 1004.

M. Born, *On the Quantum Theory of Electromagnetic Field* Proc. R. Soc. (London) **A143** (1934) 410.

[2] M. Born and L. Infeld, *Foundations of the New Field Theory*, Proc. Roy. Soc. (London) **A144** (1934) 425.

[3] P.A.M. Dirac, *Classical Theory of Radiating Electrons*, Proc. Roy. Soc. (London) **A167** (1938) 148.

M. Born, *Théorie non-linéaire du champ électromagnétique*, Ann. Inst. Poincaré **7** (1939) 155.

[4] Y.A. Gol'fand and E.S. Likhtman, *Extension of the Algebra of Poincaré Group Generators and Violation of P-Invariance*, JETP Lett. **13** (1971) 323.

[5] J. Wess y B. Zumino, *Supergauge Transformations in Four Dimensions*, Nucl. Phys. **B70** (1974) 39.

[6] J. Wess y J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton, Princeton University Press, (1983).

[7] M. Sohnius, *Introducing Supersymmetry*, Phys. Rep. **128** (1985) 39.

[8] P. Freund, *Introduction to Supersymmetry*, Cambridge University Press, 1986.

[9] C.G. Bollini, *Supersimetría (Notas de Clase)*, Centro Atómico Bariloche, 1985.

P.C. West, *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*, World Scientific, 1990.

- [10] D. Bailin y A. Love, *Supersymmetric gauge field theory and string theory*, Institute of Physics Publishing, Bristol, (1994).
- [11] J. Lykken, *Introduction to Supersymmetry*, TASI lectures 1996, [hep-th/9612114](#).
- [12] R. Haag, J.T. Łopuszański y M. Sohnius, *All Possible Generators of Supersymmetries of the S-Matrix*, Nucl. Phys. **B88** (1975) 257.
- [13] N. Seiberg y E. Witten, *Electric-Magnetic Duality, Monopole Condensation, and Confinement in $N=2$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*, Nucl. Phys. **B426** (1994) 19, Erratum-*ibid.* **B430** (1994) 485, [hep-th/9407087](#).
Monopoles, Duality and Chiral Symmetry Breaking in $N=2$ Supersymmetric QCD, Nucl. Phys. **B431** (1994) 484, [hep-th/9408099](#) .
- [14] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.S. Schwartz y Y.S. Tyupkin, *Pseudoparticle Solutions of the Yang-Mills Equations*, Phys. Lett **B59** (1975) 85.
- [15] H. de Vega and F.A. Schaposnik, *A classical vortex solution of the abelian Higgs model*, Phys. Rev. **D14** (1976) 1100.
- [16] M.K. Prasad y C.M. Sommerfield, *An Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee dyon*, Phys. Rev. Lett. **35** (1975) 760.
- [17] E.B. Bogomol'nyi, *The stability of classical solutions*, Sov. J. Nucl. Phys. **24** (1976) 449.
- [18] K. Shiraishi and S. Hirenzaki, *Bogomol'nyi equations for vortices in Born-Infeld-Higgs systems*, Int. Jour. of Mod. Phys. **A6** (1991) 2635.
- [19] A. Nakamura and K. Shiraishi, *Born-Infeld Monopoles and Instantons*, Hadronic Journal **14** (1991) 369.
- [20] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, North-holland, 1982.
- [21] E. Witten and D. Olive, *Supersymmetry Algebras that include Topological Charges*, Phys. Lett. **B78** (1978) 97.

- [22] C. Lee, K. Lee and E.J. Weinberg, *Supersymmetry and Selfdual Chern-Simons systems*, Phys. Lett. **B243** (1990) 105.

C. Lee, K. Lee and H. Min, *Selfdual Maxwell Chern-Simons Solitons*, Phys. Lett. **B252** (1990) 79.

B. Damski, *Supersymmetry and Bogomol'nyi equations in the Maxwell-Chern-Simons systems*, hep-th/0001022
- [23] J.D. Edelstein, C. Núñez and F.A. Schaposnik, *Supersymmetry and Bogomol'nyi equations in the abelian Higgs model*, Phys. Lett. **B329** (1994) 39, hep-th/9311055.
- [24] P. Navratil, *$N=2$ supersymmetry in a Chern-Simons system with the magnetic moment interaction*, Phys. Lett. **B365** (1996) 119.

H.R. Christiansen, M.S. Cunha, J.A. Helayël-Neto, L.R.U. Manssur and A.L.M. Nogueira *$N = 2$ Maxwell-Chern-Simons model with anomalous magnetic moment coupling via dimensional reduction*, Int. J. Mod. Phys. **A14** (1999) 147, hep-th/9802096.
- [25] M.B. Green, J.H. Schwarz y E.Witten, *Superstring Theory: Vol I & II*, Cambridge University Press, 1987.

J. Polchinski, *String Theory*, Cambridge University Press, 1998.
- [26] J. Scherk y J.H. Schwarz, *Dual Models of Non-Hadrons*, Nucl. Phys. **B81** (1974) 118

J. Scherk y J.H. Schwarz, *Dual Models and the Geometry of Space-Time*, Phys. Lett. **B52** (1974) 347.
- [27] A.M. Polyakov, *Quantum geometry of bosonic strings*, Phys. Lett. **B103** (1981) 207.

A.M. Polyakov, *Quantum geometry of fermionic strings*, Phys. Lett. **B103** (1981) 211.
- [28] E.S. Fradkin and A.A. Tseytlin, *Non-linear Electrodynamics From Quantized Strings*, Phys. Lett. **B163** (1985) 123.
- [29] A.A. Tseytlin, *Vector Field Effective Action in the Open Superstring Theory*, Nucl. Phys. **B276** (1986) 391, Erratum-*ibid.* **B291** (1987) 876.

- [30] A. Abouelsaood, C.G. Callan, C.R. Nappi and S.A. Yost, *Open Strings in Background Fields*, Nucl. Phys. **B280** (1987) 599.
- [31] J. Dai, R.G. Leigh and J. Polchinski, *New Connections Between String Theories*, Mod. Phys. Lett. **A4** (1989) 2073.
- [32] R.G. Leigh, *Dirac-Born-Infeld Action from the Dirichlet Sigma Model*, Mod. Phys. Lett. **A4** (1989) 2767.
- [33] J. Polchinski, *Dirichlet branes and Ramond-Ramond charges*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4724, [hep-th/9510017](#).
- [34] J. Polchinski, *TASI Lectures on D-branes*, TASI 96, World Scientific (1997), [hep-th/9611050](#).
- [35] J. Maldacena, *The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231, [hep-th/9711200](#).
- [36] E. Witten, *Bound States of Strings and p-Branes*, Nucl. Phys. **B460** (1996) 335, [hep-th/9510135](#).
- [37] A. Strominger, *Open p-branes*, Phys. Lett. **B383** (1996) 44, [hep-th/9512059](#).
- [38] C.G. Callan and J.M. Maldacena, *Brane dynamics from the Born-Infeld action*, Nucl. Phys. **B513** (1998) 198, [hep-th/9708147](#).
- [39] G. Gibbons, *Born-Infeld particles and Dirichlet p-branes*, Nucl. Phys. **B514** (1998) 603, [hep-th/9709027](#).
- [40] A. Hashimoto, *The Shape of Branes Pulled by Strings*, Phys. Rev. **D57** (1998) 6441, [hep-th/9711097](#).
- [41] D. Bak, J. Lee and H. Min, *Dynamics of BPS States in the Dirac-Born-Infeld Theory*, Phys. Rev. **D59** (1999) 045011, [hep-th/9806149](#).

- [42] T. Hagiwara, *An Effective Lagrangian for Multi-Photon Processes and a Nonlinear Born-Infeld Lagrangian*, Nucl. Phys. **B189** (1981) 135.
T. Hagiwara, *A Nonabelian Born-Infeld Lagrangian*, J. Phys. **A14** (1981) 3059.
- [43] P.C. Argyres y C.R. Nappi, *Spin 1 Effective Actions From Open Strings*, Nucl. Phys. **B330** (1990) 151.
- [44] A.A. Tseytlin, *On Non-Abelian generalization of Born-Infeld action in string theory*, Nucl. Phys. **B501** (1997) 41, [hep-th/9701125](#).
- [45] D. Brecher and M.J. Perry, *Bound States of D-Branes and the Non-Abelian Born-Infeld Action*, Nucl. Phys. **B527** (1998) 121, [hep-th/9801127](#).
- [46] D. Brecher, *BPS States of the Non-Abelian Born-Infeld Action*, Phys. Lett. **B442** (1998) 117, [hep-th/9804180](#).
- [47] J.H. Schwarz, *An $SL(2,Z)$ Multiplet of Type IIB Superstrings*, Phys. Lett. **B360** (1995) 13, Erratum-*ibid.* **B364** (1995) 252, [hep-th/9508143](#).
- [48] P.A.M. Dirac, *An extensible model of the electron*, Proc. Roy. Soc. **A268** (1962) 57.
- [49] J.A. de Azcarraga, J.P. Gauntlett, J.M. Izquierdo y P.K. Townsend, *Topological Extensions of the Supersymmetry Algebra for Extended Objects*, Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 2443.
P.K. Townsend, *M-Theory from its Superalgebra*, Lectures at Cargese 1997, [hep-th/9712004](#).
- [50] S. Coleman y J. Mandula, *All Possible Symmetries of the S-Matrix*, Phys. Rev. **159** (1967) 1251.
- [51] G. Mack y A. Salam, *Finite-Component Field Representations of the Conformal Group*, Ann. Phys.(NY) **53** (1969) 174.
- [52] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press, 1996.

- [53] P. Di Vecchia, *Duality in $N=2$, $N=4$ Supersymmetric Gauge Theories*, Lectures given at Les Houches Summer School in Theoretical Physics, Session 68: Probing the Standard Model of Particle Interactions, Les Houches, France, [hep-th/9803026](#).
- L. Alvarez-Gaume y S.F. Hassan, *Introduction to S duality in $N = 2$ supersymmetric gauge theories: A pedagogical review of the work of Seiberg and Witten*, Fortsch. Phys. **45** (1997) 159, [hep-th/9701069](#).
- A. Harvey, *Magnetic Monopoles, Duality and Supersymmetry*, Published in Trieste HEP Cosmology 1995, [hep-th/9603086](#).
- [54] E. Kiritsis, *Supersymmetry and Duality in Field and String Theory*, Lectures given at NATO Advanced Study Institute: TMR Summer School on Progress in String Theory and M-Theory (Cargese 99), Cargese, [hep-ph/9911525](#).
- [55] S. Deser and R. Puzalowski, *Supersymmetric Non-Polynomial Vector Multiplets and Causal Propagation*, J. Phys. **A13** (1980) 2501.
- [56] S. Cecotti and S. Ferrara, *Supersymmetric Born-Infeld Lagrangians*, Phys. Lett. **B187** (1987) 335.
- [57] J. Bagger and A. Galperin, *New Goldstone Multiplet for Partially Broken Supersymmetry*, Phys. Rev. **D55** (1997) 1091, [hep-th/9608177](#).
- J. Bagger, *Partial Breaking of Extended Supersymmetry*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **A52** (1997) 362, [hep-th/9610022](#).
- [58] M. Aganagic, C. Popescu and J.H. Schwarz, *D-brane actions with local kappa symmetry*, Phys. Lett. **B393** (1997) 311, [hep-th/9610249](#).
- Gauge invariant and gauge fixed D-brane actions*, Nucl. Phys. **B 495** (1997) 99, [hep-th/9612080](#).
- [59] S. Ketov, *A Manifestly $N=2$ Supersymmetric Born-Infeld Action*, Mod. Phys. Lett. **A14** (1999) 501, [hep-th/9809121](#).

- Born-Infeld-Goldstone Superfield Actions for Gauge Fixed D-5 Branes and D-3 Branes in 6-D*, Nucl. Phys. **B553** (1999) 250, [hep-th/9812051](#).
- [60] M. Rocek and A.A. Tseytlin, *Partial breaking of global D=4 supersymmetry, constrained superfields, and 3-brane actions*, Phys. Rev. **D59** (1999) 106001, [hep-th/9811232](#).
- [61] A.A. Tseytlin, *Born-Infeld action, supersymmetry and string theory*, en *Yuri Golfand memorial volume*, ed. M. Shifman, World. Sci. 2000 [hep-th/9908105](#).
- [62] A. Hashimoto and W.I. Taylor IV, *Fluctuation spectra of tilted and intersecting D-branes from the Born-Infeld action*, Nucl. Phys. **503** (1997) 193, [hep-th/9703217](#).
- [63] H. B. Nielsen and P. Olesen, *Vortex line models for dual strings*, Nucl. Phys. **B61** (1973) 45.
- [64] G. 't Hooft, *Magnetic Monopole in Unified Gauge Theories*, Nucl. Phys. **B79** (1974) 276.
A.M. Polyakov, *Particle Spectrum in the Quantum Field Theory*, JETP Lett. **20** (1974) 194.
- [65] S. Gonorazky, C. Núñez, F.A. Schaposnik and G. Silva, *Bogomol'nyi Bounds and the Supersymmetric Born-Infeld Theory*, Nucl.Phys. **B531** (1998) 168, [hep-th/9805054](#).
- [66] H. Christiansen, C. Núñez and F.A. Schaposnik, *Uniqueness of Bogomol'nyi equations and Born-Infeld like Supersymmetric theories*, Phys. Lett **B441** (1998) 185, [hep-th/9807197](#).
- [67] W. Taylor IV, *Lectures on D-Branes, Gauge Theory and M(atrices)*, Lectures at 2nd Trieste Conference on Duality in String Theory, [hep-th/9801182](#).
- [68] J.P. Gauntlett, J. Gomis and P.K. Townsend, *Bounds for Worldvolume Branes*, JHEP **01** (1998) 003, [hep-th/ 9711205](#)

- [69] D.J. Gross y E. Witten, *Superstring modifications of Einstein equations*, Nucl.Phys. **B277** (1986) 1.
- [70] E. Bergshoeff, M. Rakowski y E. Sezgin, *Higher derivative super Yang-Mills theories*, Phys. Lett. **B185** (1987) 371.
- [71] R.R. Metsaev, M.A.Rakhmanov y A.A. Tseytlin, *The Born-Infeld action as the effective action in the open superstring theory*, Phys. Lett. **B193** (1987) 207.
E. Bergshoeff, E. Sezgin, C.N. Pope y P.K. Townsend, *The Born-Infeld Action from Conformal Invariance of the Open Superstring*, Phys. Lett. **B188** (1987) 70.
- [72] R. Emparán, *Born-Infeld Strings tunneling to D-branes*, Phys. Lett. **B423** (1998) 71, [hep-th/9711106](#).
K.G. Savvidy, *Brane Death via Born-Infeld String*, [hep-th/9810163](#).
- [73] C.G. Savvidy and K.G. Savvidy, *Neumann Boundary Conditions from Born-Infeld Dynamics*, Nucl. Phys. **B561** (1999) 117, [hep-th/9902023](#).
- [74] K.G. Savvidy, *Born-Infeld action in String Theory*, (1999), PhD Thesis at Princeton University, [hep-th/9906075](#).
- [75] K. Hashimoto, *Born-Infeld Dynamics in Uniform Electric Field*, JHEP **9907** (1999) 016.
- [76] J.P. Gauntlett, C. Koehl, D. Mateos, P.K. Townsend and M. Zamaklar, *Finite energy Dirac-Born-Infeld monopoles and string junctions*, Phys. Rev. **D60** (1999) 045004, [hep-th/9903156](#).
- [77] G.W. Gibbons, *Branes as BIONS*, Class. Quant. Grav. **16** (1999) 1471, [hep-th/9803203](#).
- [78] G.W. Gibbons, *Wormholes on the World Volume: Born-Infeld particles and Dirichlet p-branes*, Lecture at “Quantum Mechanics of Fundamental Systems VI”, Santiago, Chile, [hep-th/9801106](#).
- [79] K. Ghoroku and K. Kaneko, *Born-Infeld strings between D-branes*, Phys. Rev. **D61** (2000) 066004, [hep-th/9908154](#).

- [80] O. Bergman and M.R. Gaberdiel, *Non-BPS Dirichlet branes*, Class. Quant. Grav. **17** (2000) 961, [hep-th/9908126](#).
- [81] I. Bialynicki-Birula, *Non-Linear electrodynamics: Variations on a Theme of Born-Infeld*, en *Quantum Theory of Particles and Fields*, eds. B. Jancewicz y J. Lukierski, World Scientific, (1983).
- [82] E. Schrödinger, Proc. R. Soc. (London) **A150** (1935) 465.
- [83] G. Gibbons and D.A. Rasheed, *Electric-Magnetic duality rotations in non-linear electrodynamics*, Nucl. Phys. **B454** (1995) 185, [hep-th/9506035](#).
- [84] D. Brace, B. Morariu y B. Zumino, *Duality Invariant Born-Infeld Theory*, [hep-th/9905218](#).
M. Gaillard y B. Zumino, *Nonlinear Electromagnetic Selfduality and Legendre Transformations*, Contributed to Newton Institute Euroconference on Duality and Supersymmetric Theories, Cambridge, [hep-th/9712103](#).
A.A. Tseytlin, *Self-duality of Born-Infeld action and Dirichlet 3-brane of type IIB superstring theory*, Nucl. Phys. **B469** (1996) 51, [hep-th/9602064](#).
- [85] P.A.M. Dirac, *Quantized singularities in the electromagnetic field*, Proc. Roy. Soc. (London) **A133** (1931) 60.
P.A.M. Dirac, *The theory of magnetic poles*, Phys. Rev. **74** (1948) 817.
L. Alvarez-Gaume y S.F. Hassan, *Introduction to S duality in $N = 2$ supersymmetric gauge theories: A pedagogical review of the work of Seiberg and Witten*, Fortsch. Phys. **45** (1997) 159, [hep-th/9701069](#).
- [86] E.M. Corson, *Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave-Equations*, Blackie & Son Limited, London, (1953).
- [87] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, Addison-Wesley, 1989.
- [88] S. Gonorazky, F.A. Schaposnik y G. Silva, *Supersymmetric Nonabelian Born-Infeld Theory*, Phys. Lett. **B449** (1999) 187, [hep-th/9812094](#).

- [89] H.R. Christiansen, N. Grandi, F.A. Schaposnik y G. Silva, *Non-BPS Dyons and branes in the Dirac-Born-Infeld theory*, Phys. Rev. **D61** (2000) 105016, [hep-th/9911119](#).